

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2011.04.008

圣维南方程组 4 点线性隐格式的稳定性分析

胡庆云¹,王船海²

(1.河海大学理学院,江苏 南京 210098 ;2.河海大学水文水资源学院,江苏 南京 210098)

摘要 :圣维南方程组是工程实践中应用广泛的一类流体动力学方程组,4 点线性隐格式亦是目前较为成熟的计算圣维南方程组的差分格式.依据非线性稳定性的定义,提出用增长因子 $M(\tau)$ 判别非线性差分格式的稳定性.针对圣维南方程组的 4 点线性隐式差分格式,给出了计算增长因子 $M(\tau)$ 切实可行的方法,并结合算例得到了增长因子 $M(\tau)$ 的一些近似数据.稳定性研究结果将有助于更好地选择时步长 τ 和网格步长 Δx ,对改善计算格式的稳定性具有指导意义.

关键词 :圣维南方程组;4 点线性隐式格式;非线性稳定性;增长因子 $M(\tau)$

中图分类号 :TV131.4 **文献标志码** :A **文章编号** :1000-1980(2011)04-0397-05

非线性计算的稳定性问题是流体动力学方程组求解中不容易解决的一个重要问题.很多启示性方法^[1-3]可以得到非线性计算稳定性的必要条件.本文基于非线性稳定性的一般概念^[4-8],提出了一种判别非线性稳定性的方法.通过该方法可以得到稳定性的近似充分条件.

本文考虑的流体动力学方程组即圣维南方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\alpha u Q}{\partial x} + gA \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{gn^2}{R^3} |u| Q = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: A ——过水断面面积; Q ——流量; u ——流速; Z ——水位; g ——重力加速度; n ——糙率; R ——水力半径; t, x ——时间和位置变量.

在用差分法求解流体力学方程时,不可避免地牵涉到稳定性问题.稳定性是指初始数据误差与计算过程误差的积累对方程解的影响.一般而言,稳定的格式是指满足

$$\| [\alpha(\tau)]^k u_0 - [\alpha(\tau)]^k v_0 \| \leq K_0 \| u_0 - v_0 \|$$

的差分格式^[4-8].其中: $\alpha(\tau)$ 是差分算子, τ 为时步长; k 是计算的步数,满足 $0 \leq k\tau \leq T$.由于 k 是任意的,检验差分格式的稳定性很不方便.如果只检验 1 步,则相对容易些.满足

$$\| \alpha(\tau) u_0 - \alpha(\tau) v_0 \| \leq (1 + C_0 \tau) \| u_0 - v_0 \|$$

的差分格式即符合 Von Neumann 条件.若找到了有界的 C_0 ,就找到了有界的 K_0 ,并且 $K_0 = \exp(C_0 T)$.因此,符合 Von Neumann 条件的差分格式一定是稳定的,而且 C_0 越小, K_0 也越小,稳定性能也越好^[4,6].为叙述方便起见,以下称 1 步差分计算多出的乘积因子 $M(\tau) = 1 + C_0 \tau$ 为增长因子.

本文对求解方程组(1)的差分格式给出的一种求增长因子的近似方法,可以判别稳定性.

1 增长因子 $M(\tau)$ 的求法

设有方程 $\frac{\partial w}{\partial t} = Lw$. 对时间变量 t 离散化,得

$$\frac{w^{k+1} - w^k}{\tau} = f(w^k, w^{k+1})$$

其中 w^k 是解 w 在 $k\tau$ 时的近似值 $(f(w^k, w^{k+1})) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} Lw^k$. 由此离散式得

$$w^{k+1} = w^k + \tau f(w^k, w^{k+1}) \quad (2)$$

由式(2)则可以从已知的 w^k 得到 w^{k+1} . 设另有 $\tilde{w}^{k+1} = \tilde{w}^k + \tau f(\tilde{w}^k, \tilde{w}^{k+1})$. 其中 $\tilde{w}^k - w^k$ 是第 k 步计算时的误差. 视 w^{k+1} 是由方程(2)确定的 w^k 的隐函数 $w^{k+1} = g(w^k)$ 和 $\tilde{w}^{k+1} = g(\tilde{w}^k)$, 则第 $k+1$ 步计算时的误差为

$$\tilde{w}^{k+1} - w^{k+1} = \tilde{w}^k - w^k + \tau (f(\tilde{w}^k, g(\tilde{w}^k)) - f(w^k, g(w^k)))$$

据泰勒中值定理, $\tilde{w}^{k+1} - w^{k+1} = \tilde{w}^k - w^k + \tau \left[\frac{df(w^k, g(w^k))}{dw^k} (\tilde{w}^k - w^k) + o(\tilde{w}^k - w^k) \right]$. 略去高阶小量

$\tau o(\tilde{w}^k - w^k)$, $\tilde{w}^{k+1} - w^{k+1} \approx M(\tau)(\tilde{w}^k - w^k)$, 从而有误差近似估计式

$$\|\tilde{w}^{k+1} - w^{k+1}\| \leq \|M(\tau)\| \|\tilde{w}^k - w^k\|$$

其中

$$M(\tau) = 1 + \tau \frac{df(w^k, g(w^k))}{dw^k} \quad C_0 \approx \frac{df(w^k, g(w^k))}{dw^k}$$

$\frac{df(w^k, g(w^k))}{dw^k}$ 可以通过对方程(2)两端对 w^k 微分后, 解方程得到.

2 方程组(1)的离散化及 $M(\tau)$ 的计算公式

方程组(1)的4点线性隐格式^[9-11]的半离散化形式为

$$\begin{cases} B \frac{Z^{k+1} - Z^k}{\tau} + \frac{\partial Q^{k+1}}{\partial x} = 0 \\ \frac{Q^{k+1} - Q^k}{\tau} + \frac{\alpha u^k Q^{k+1}}{\partial x} + gA^k \frac{\partial Z^{k+1}}{\partial x} + \frac{gn^2}{(R^k)^{\frac{4}{3}}} |u^k| Q^{k+1} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中 B 是河宽. 对于固定的时刻 t 和坐标 x , Z^{k+1} , Q^{k+1} 是由方程组(3)确定的 Z^k 和 Q^k 的隐函数, Z^k 和 Q^k 是独立的自变量.

方程组(3)改写为

$$\begin{cases} BZ^{k+1} + \tau \frac{\partial Q^{k+1}}{\partial x} = BZ^k \\ \left(1 + \tau \frac{gn^2}{(R^k)^{\frac{4}{3}}} |u^k| \right) Q^{k+1} + \tau \frac{\alpha u^k Q^{k+1}}{\partial x} + \tau gA^k \frac{\partial Z^{k+1}}{\partial x} = Q^k \end{cases} \quad (4)$$

对式(4)两端分别关于 Z^k 和 Q^k 求导, 就可得到关于 $Z_Z^{k+1} = \frac{\partial Z^{k+1}}{\partial Z^k}$, $Q_Z^{k+1} = \frac{\partial Q^{k+1}}{\partial Z^k}$, $Z_Q^{k+1} = \frac{\partial Z^{k+1}}{\partial Q^k}$ 以及 $Q_Q^{k+1} =$

$\frac{\partial Q^{k+1}}{\partial Q^k}$ 的方程.

关于 Z^k 求导:

$$\begin{cases} BZ_Z^{k+1} + \tau \frac{\partial Q_Z^{k+1}}{\partial x} = B - s_0(Z^{k+1} - Z^k) \\ \left(1 + \tau \frac{gn^2}{(R^k)^{\frac{4}{3}}} |u^k| \right) Q_Z^{k+1} + \tau \frac{\alpha u^k Q_Z^{k+1}}{\partial x} + \tau gA^k \frac{\partial Z_Z^{k+1}}{\partial x} = \frac{4}{3} \frac{\tau gn^2}{(R^k)^{\frac{7}{3}}} |u^k| Q^{k+1} - \tau gB \frac{\partial Z^{k+1}}{\partial x} \end{cases} \quad (5)$$

式中 s_0 是边坡.

关于 Q^k 求导:

$$\begin{cases} BZ_Q^{k+1} + \tau \frac{\partial Q_Q^{k+1}}{\partial x} = 0 \\ \left(1 + \tau \frac{gn^2}{(R^k)^{\frac{4}{3}}} |u^k| \right) Q_Q^{k+1} + \tau \frac{\alpha u^k Q_Q^{k+1}}{\partial x} + \tau gA^k \frac{\partial Z_Q^{k+1}}{\partial x} = 1 - \tau \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^{k+1}}{A^k} \right) + \frac{gn^2}{(R^k)^{\frac{4}{3}}} \text{sgn}(u^k) \frac{Q^{k+1}}{A^k} \right] \end{cases} \quad (6)$$

根据式(5)和式(6)可计算出 Z_Z^{k+1} , Q_Z^{k+1} 和 Z_Q^{k+1} , Q_Q^{k+1} . 由式(4)~(6)可以看出, 求未知量 Z^{k+1} , Q^{k+1} 的式(4)以及求未知量 Z_Z^{k+1} , Q_Z^{k+1} , Z_Q^{k+1} , Q_Q^{k+1} 的式(5)和式(6), 只是常数项不同. 因此, 求 Z^{k+1} , Q^{k+1} 和求

Z_Z^{k+1}, Q_Z^{k+1} 以及求 Z_Q^{k+1}, Q_Q^{k+1} 可以采用相同的计算方法. 在解后 2 个方程组, 即求解 $Z_Z^{k+1}, Q_Z^{k+1}, Z_Q^{k+1}$ 及 Q_Q^{k+1} 时, 边界条件用差商近似代替. 当 τ 很小时, 差商有可能不稳定, 采用较稳定时的差商的线性插值作为边界条件. 解出 $Z^{k+1}, Q^{k+1}, Z_Z^{k+1}, Q_Z^{k+1}, Z_Q^{k+1}$ 和 Q_Q^{k+1} , 代入式

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}^{k+1} - Z^{k+1} \\ \tilde{Q}^{k+1} - Q^{k+1} \end{bmatrix} = M(\tau) \begin{bmatrix} \tilde{Z}^k - Z^k \\ \tilde{Q}^k - Q^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Z}^k - Z^k \\ \tilde{Q}^k - Q^k \end{bmatrix}$$

即得每一固定时刻 $k\tau$ 和固定坐标 $i\Delta x$ 处的 $M(\tau)$. 其中:

$$m_{11} = 1 - \frac{\tau}{\Delta x} \frac{(Q_Z^{k+1})_{i+1} - (Q_Z^{k+1})_i}{B_{i+\frac{1}{2}}^k} + \frac{\tau}{\Delta x} s_0 \frac{Q_{i+1}^{k+1} - Q_i^{k+1}}{(B_{i+\frac{1}{2}}^k)^2}$$

$$m_{12} = -\frac{\tau}{\Delta x} \frac{(Q_Q^{k+1})_{i+1} - (Q_Q^{k+1})_i}{B_{i+\frac{1}{2}}^k}$$

$$m_{21} = -\frac{\tau}{\Delta x} \left[u_{i+1}^k (Q_Z^{k+1})_{i+1} - u_i^k (Q_Z^{k+1})_i + g B_{i+\frac{1}{2}}^k (Z_{i+1}^{k+1} - Z_i^{k+1}) + g A_{i+\frac{1}{2}}^k ((Z_Z^{k+1})_{i+1} - (Z_Z^{k+1})_i) \right] -$$

$$\tau \left[\frac{gn^2}{(R_{i+\frac{1}{2}}^k)^{\frac{4}{3}}} \left| u_{i+\frac{1}{2}}^k \right| (Q_Z^{k+1})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} \frac{gn^2}{(R_{i+\frac{1}{2}}^k)^{\frac{7}{3}}} \left| u_{i+\frac{1}{2}}^k \right| Q_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} \right]$$

$$m_{22} = 1 - \frac{\tau}{\Delta x} \left[\frac{Q_{i+1}^{k+1}}{A_{i+1}^k} - \frac{Q_i^{k+1}}{A_i^k} + u_{i+1}^k (Q_Q^{k+1})_{i+1} - u_i^k (Q_Q^{k+1})_i + g A_{i+\frac{1}{2}}^k ((Z_Q^{k+1})_{i+1} - (Z_Q^{k+1})_i) \right] -$$

$$\tau \left[\frac{gn^2}{(R_{i+\frac{1}{2}}^k)^{\frac{4}{3}}} \operatorname{sgn}(u_{i+\frac{1}{2}}^k) \frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}}{A_{i+\frac{1}{2}}^k} + \frac{gn^2}{(R_{i+\frac{1}{2}}^k)^{\frac{4}{3}}} \left| u_{i+\frac{1}{2}}^k \right| (Q_Q^{k+1})_{i+\frac{1}{2}} \right]$$

于是

$$\left\| \begin{bmatrix} \tilde{Z}^{k+1} - Z^{k+1} \\ \tilde{Q}^{k+1} - Q^{k+1} \end{bmatrix} \right\| \leq \|M(\tau)\| \left\| \begin{bmatrix} \tilde{Z}^k - Z^k \\ \tilde{Q}^k - Q^k \end{bmatrix} \right\|$$

3 算 例

设一长 10 km、过水断面是矩形、河宽 10 m 的河道, 糙率 $n = 0.025$. 恒定流算例: 上游端水位 5 m, 下游端水位固定为 3 m, 在充分长的时间后, 每一处的水位和流量不变. 非恒定流算例: 上游端水位 5 m, 下游端水位以 4 m 为中心, 作振幅 1 m 的正弦波振荡, 周期是 12 h. 分别取 $\Delta x = 100, 200, 400$ m, $\tau = 1, 2, 5, 10, 20, 30, 60, 100, 300$ s 进行计算和分析. 其中 $\Delta x, \tau$ 分别为计算的网格步长和时间步长. 计算得到的恒定流和非恒定流的 $\|M(\tau)\|$ 和 C_0 见表 1~4.

表 1 恒定流的 $\|M(\tau)\|$
Table 1 $\|M(\tau)\|$ of steady flow

$\Delta x/\text{m}$	$\ M(\tau)\ $						
	$\tau = 1\text{ s}$	$\tau = 2\text{ s}$	$\tau = 5\text{ s}$	$\tau = 10\text{ s}$	$\tau = 60\text{ s}$	$\tau = 100\text{ s}$	$\tau = 300\text{ s}$
100	1.062 324	1.127 969	1.342 678	1.744 569	5.732 472	8.085 069	14.594 360
200	1.060 885	1.124 990	1.334 880	1.729 626	5.7212 93	8.091 928	14.646 740
400	1.058 406	1.119 813	1.320 705	1.699 772	5.659 254	8.058 021	14.714 730

表 2 非恒定流的 $\|M(\tau)\|$
Table 2 $\|M(\tau)\|$ of unsteady flow

$\Delta x/\text{m}$	$\ M(\tau)\ $						
	$\tau = 5\text{ s}$	$\tau = 10\text{ s}$	$\tau = 20\text{ s}$	$\tau = 30\text{ s}$	$\tau = 60\text{ s}$	$\tau = 100\text{ s}$	$\tau = 300\text{ s}$
100	1.151 046	1.320 143	1.702 718	2.125 735	6.779 605	12.268 990	55.421 450
200	1.126 613	1.332 072	1.717 389	2.149 400	3.618 790	9.339 810	56.775 260
400	53.138 790	11.321 850	1.546 605	1.998 710	2.799 674	4.212 338	27.885 780

表3 恒定流的 C_0

Table 3 C_0 of steady flow

$\Delta x/m$	C_0/s^{-1}						
	$\tau = 1\text{ s}$	$\tau = 2\text{ s}$	$\tau = 5\text{ s}$	$\tau = 10\text{ s}$	$\tau = 60\text{ s}$	$\tau = 100\text{ s}$	$\tau = 300\text{ s}$
100	0.062 323 689	0.063 984 275	0.068 535 663	0.074 456 856	0.078 874 536	0.070 850 685	0.045 314 528
200	0.060 884 833	0.062 495 232	0.066 976 026	0.072 962 560	0.078 688 227	0.070 919 275	0.045 489 140
400	0.058 405 757	0.059 906 662	0.064 141 013	0.069 977 202	0.077 654 235	0.070 580 207	0.045 715 760

表4 非恒定流的 C_0

Table 4 C_0 of unsteady flow

$\Delta x/m$	C_0/s^{-1}						
	$\tau = 1\text{ s}$	$\tau = 2\text{ s}$	$\tau = 5\text{ s}$	$\tau = 10\text{ s}$	$\tau = 60\text{ s}$	$\tau = 100\text{ s}$	$\tau = 300\text{ s}$
100	0.030 209 279	0.032 014 300	0.035 135 902	0.037 524 495	0.096 326 753	0.112 689 900	0.181 404 800
200	0.025 322 556	0.033 207 189	0.035 869 445	0.038 313 333	0.043 646 500	0.083 398 104	0.185 917 600
400	10.427 760 000	1.032 185 000	0.027 330 261	0.026 934 644	0.029 994 568	0.032 123 379	0.089 619 271

由表1和表2可见： $\|M(\tau)\|$ 值大多很有规律性，它们随 τ 的增加而增加，随 Δx 的增加而减少；个别 $\|M(\tau)\|$ 没有规律，它们突然变得很大，这些值位于 $\tau=0$ 的附近。这说明，步长 τ 越小，计算不一定越稳定。此结论与文献[3,12]的结论一致，这是非线性稳定性的独有特征。从表1和表2中 $\|M(\tau)\|$ 值的变化也可以看出，要提高计算格式在时步长 τ 很小时的稳定性，可通过减小 Δx 的方法来实现。

由表3和表4可见：恒定流的 C_0 位于 $0.04\sim 0.08\text{ s}^{-1}$ 之间，近似于常数；非恒定流的 C_0 大多位于 $0.02\sim 0.1\text{ s}^{-1}$ 之间，变化也不大。这两例 C_0 的差异还说明，非线性稳定性不仅与差分格式有关，还与初边值条件或者说与原微分方程解的性质有关。此结论与文献[3-6]的结论一致。表2和表4中的部分数据显示，必须合理地选择或搭配 Δx 和 τ 。

4 结 语

非线性计算的稳定性问题是流体动力学方程组求解中不容易解决的一个重要问题，尽管目前有很多的稳定性判别方法，但都不能使稳定性问题予以完美解决，稳定性理论尚在发展中。本文基于非线性稳定性的一般概念，提出了一种判别非线性稳定性的近似方法，并且用此方法判别了4点线性隐格式计算圣维南方程组的稳定性，得到的结论与现有文献提出的观点一致。本文还提出了通过对时步长 τ 和网格步长 Δx 的搭配，改善格式的稳定性，是个有益的方法的观点。

参考文献：

[1] HIRT C W. Heuristic stability theory for finite-difference equations[J]. J Comp Phys ,1968 ,121 :339-355.

[2] 林万涛,季仲贞,王斌,等.一种判定非线性发展方程差分格式计算稳定性的新方法[J].科学通报,2000,45(8):881-884. (LIN Wan-tao,JI Zhong-zhen,WANG Bin,et al.The new method of judging the calculation's stability of evolution equations difference schem[J].Chinese Science Bulletin,2000,45(8):881-884.(in Chinese))

[3] 杨晓忠,张希荣,彭武安,等.发展方程差分格式的非线性计算稳定性问题[J].华北电力大学学报,2001,28(2):1-7.(YANG Xiao-zhong,ZHANG Xi-rong,PENG Wu-an,et al.Problems on nonlinear computational stability of the difference schemes of evolution equation[J].Journal of North China Electric Power University,2001,28(2):1-7.(in Chinese))

[4] 胡庆云.Lax 等价定理在非线性的推广[J].应用数学,2002,15(1):62-67.(HU Qing-yun.An extension of Lax theorem to the nonlinear case[J].Mathematica Applicata,2002,15(1):62-67.(in Chinese))

[5] 胡庆云.一类非线性发展方程差分法的稳定性[J].河海大学学报:自然科学版,2007,35(5):609-612.(HU Qing-yun.Stability study of difference method for solution of a kind of nonlinear evolution equations[J].Journal of Hohai University :Natural Sciences,2007,35(5):609-612.(in Chinese))

[6] 胡庆云.一类发展方程初边值问题差分法的收敛性[J].河海大学学报:自然科学版,2007,35(6):735-738.(HU Qing-yun.Convergence of difference method for initial boundary value problem of a kind of evolution equation[J].Journal of Hohai University :Natural Sciences,2007,35(6):735-738.(in Chinese))

[7] LÓPEZ-MARCOS J C , SANZ-SERNA J M . Stability and convergence in numerical analysis [M] :linear investigation of nonlinear stability [J] . IMA Journal of Numerical Analysis , 1988 , 8 (1) :71-84 .

[8] 黄明游 . 发展方程数值计算方法 [M] . 北京 : 科学出版社 , 2004 :117-143 .

[9] 李光炽 , 王船海 . 大型河网水流模拟的矩阵标识法 [J] . 河海大学学报 , 1995 , 23 (1) :36-43 . (LI Guang-zhi , WANG Chuan-hai . Matrix mark method for large-scale river network flow modeling [J] . Journal of Hohai University , 1995 , 23 (1) :36-43 . (in Chinese))

[10] 张防修 , 王艳平 , 韩龙喜 , 等 . 复式河道一维洪水演进数值模拟 [J] . 水利水电科技进展 , 2008 , 28 (5) :6-9 . (ZHANG Fang-xiu , WANG Yan-ping , HAN Long-xi , et al . Numerical simulation of one-dimensional flood routing for a compound channel [J] . Advances in Science and Technology of Water Resources , 2008 , 28 (5) :6-9 . (in Chinese))

[11] 吴晓玲 , 王船海 , 向小华 . 实时校正中系统噪声均值的空间分布 [J] . 河海大学学报 : 自然科学版 , 2008 , 36 (4) :448-451 . (WU Xiao-ling , WANG Chuan-hai , XIANG Xiao-hua . Spatial distribution of mean value of system noise in real-time updating [J] . Journal of Hohai University : Natural Sciences , 2008 , 36 (4) :448-451 . (in Chinese))

[12] 杨晓忠 , 彭武安 , 赵振文 , 等 . 发展方程的非线性计算不稳定问题 [J] . 现代电力 , 2000 , 17 (2) :31-37 . (YANG Xiao-zhong , PENG Wu-an , ZHAO Zheng-wen , et al . The problems of nonlinear computational in stability to evolution equations [J] . Modern Electric Power , 2000 , 17 (2) :31-37 . (in Chinese))

Stability analysis of four-point linear implicit scheme of Saint-Venant equations

HU Qing-yun¹ , WANG Chuan-hai²

- (1. College of Sciences , Hohai University , Nanjing 210098 , China ;
2. College of Hydrology and Water Resources , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract : Saint-Venant equations are a kind of fluid dynamics equations , which is widely used in engineering practice . Four-point linear implicit scheme is a common difference scheme for solving Saint-Venant equations at present . According to the definition of nonlinear stability , increase factor $M(\tau)$ is proposed to discriminate the stability of nonlinear difference schemes . A feasible method for calculating increase factor $M(\tau)$ of four-point linear implicit scheme of Saint-Venant equations is provided . Some approximate data of increase factor $M(\tau)$ are obtained through a case study . The results of stability studies will help make a better choice of time step τ and grid step Δx , which is of significance in improving the stability of calculation scheme .

Key words : Saint-Venant equations ; four-point linear implicit scheme ; nonlinear stability ; increase factor $M(\tau)$