

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2011.04.019

供水管网概率水力模型线性化求解方法

金 溪

(武汉理工大学土木工程与建筑学院,湖北 武汉 430070)

摘要:针对确定性水力模型无法模拟节点流量的随机变化对于节点水压、管段流量的影响,只能获得某一工况下的计算结果的问题,通过将确定性水力模型在节点流量取数学期望时进行线性化,将节点水压与管段流量用节点流量的线性组合进行表达,从而利用节点流量的数学期望和标准差,求得节点水压与管段流量的概率分布.随机试验验证表明,概率水力模型的线性化求解方法,求解结果与随机试验方法计算结果吻合良好.这说明在节点流量数学期望值附近,可以利用线性化确定性水力模型进行供水管网的概率水力模拟.

关键词:供水管网;水力模型;线性化;概率模拟

中图分类号:TU991.33

文献标志码:A

文章编号:1000-1980(2011)04-0458-06

确定性水力模型的计算结果只对应某一组确定的节点流量.任何一个节点流量数值的改变,水力模型都需要进行重新计算以获得节点水压、管段流量等工况参数的数值^[1].但是,管网中节点流量的数值是随机变化的,而确定性模型无法根据节点流量的波动描述节点水压、管段流量的变化规律.概率水力模拟便是针对这一问题发展起来的水力模拟方法^[2-3].与确定性模型类似,概率模拟方法的已知条件仍然为节点流量、管段阻力系数、水池水位等参数,只是已知条件的表达方式不同.在概率水力模拟中,节点流量视为符合正态分布律的随机变量,所以节点流量的定义是通过一对数字(数学期望、方差)给出的.根据节点流量的概率分布,可以计算节点水压及管段流量的概率分布特性^[4].供水管网概率水力模型在水力模型校核^[5]、管网可靠性评价^[6-9]、管网优化设计方面^[10]已经有所应用.管网概率模型的精确求解方法可以分为 2 种,一种是随机试验法,一种是解析法.但 2 种方法分别存在计算量大和求解困难的问题.针对精确求解方法存在的问题,本文利用线性化确定性水力模型的方法求解概率水力模型的近似解.当近似求解方法的结果满足精度要求时,利用近似方法求解概率模型不仅计算过程简单而且可以节省大量计算时间.

1 确定性水力模型

在确定性水力模型中,求解未知量的基础方程^[11]包括压降方程

$$h_{ij} = s_{ij}q_{ij}^n \quad (1)$$

连续性方程 $Jq + D = 0 \quad (2)$

能量方程 $Lh = 0 \quad (3)$

虚环方程 $L_S h + \Delta H = 0 \quad (4)$

式中: h_{ij} 、 q_{ij} 、 s_{ij} ——管段 ij 的水头损失、流量、摩阻系数; J ——衔接矩阵; L ——回路矩阵; L_S ——虚环回路矩阵; h 、 q 、 D ——管网中管段水头损失、管段流量、节点流量向量; ΔH ——虚环中水源节点绝对水头差向量.利用上述 4 种基础方程可以将水力模型以环方程、节点方程、管段方程等形式进行描述和求解,从而获得节点水压、管段流量、管段水头损失等未知量的计算结果.

2 概率水力模拟方法

概率水力模拟的结果为节点水压、管段流量的概率分布.可以通过随机试验方法或者联合概率分布方法

收稿日期:2010-07-06

基金项目:武汉理工大学博士科研启动资金(471-38650494)

作者简介:金溪(1978—),男(回族),辽宁丹东人,讲师,博士,主要从事给水管网优化理论与应用研究. E-mail:jinxi1978@126.com

求解需要的结果,但计算量很大,对于复杂管网,计算时间常常是不可接受的.为了使模拟结果在可接受的时间内求得,需要以线性化的确定性水力模型为基础,用节点流量的线性组合构成节点水压及管段流量的表达式,并利用“正态分布随机变量的线性组合仍然为符合正态分布的随机变量”这一性质求解节点水压及管段流量的概率分布.为了达到这个目的,需要给出 2 条假设 (a)节点流量是相互独立的符合正态分布的随机变量;(b)在节点流量的数学期望值附近,可以采用线性关系替代管段流量与管段水头损失之间的非线性关系.

2.1 水力模型的线性化

水力模型的基础方程中,只有压降方程为非线性方程,需要进行线性化.线性化的方法是在节点流量取数学期望时,将管段水头损失对管段流量的一阶导数值作为管段水头损失随管段流量变化的斜率,即 $h_{ij} = h'_{ij}(q_{0ij})q_{ij} = ns_{ij}q_{0ij}^{n-1}q_{ij}$,设 $r_{ij} = ns_{ij}q_{0ij}^{n-1}$,则

$$h_{ij} = r_{ij}q_{ij} \tag{5}$$

式中 q_{0ij} 为节点流量取数学期望时管段 ij 的流量.

2.2 节点水压与节点流量的线性表达式

将节点水压用节点流量进行线性表达时,需要利用确定性水力模型的节点方程形式

$$\begin{cases} \sum_{j \in \Omega_1} q_{1j} + D_1 = 0 \\ \sum_{j \in \Omega_n} q_{nj} + D_n = 0 \end{cases} \tag{6}$$

将管段流量与水头损失的线性关系式(5)代入方程(6),并用节点水压差替代管段水头损失,得

$$\begin{cases} \sum_{j \in \Omega_1} \frac{H_1 - H_j}{r_{1j}} + D_1 = 0 \\ \sum_{j \in \Omega_n} \frac{H_n - H_j}{r_{nj}} + D_n = 0 \end{cases} \tag{7}$$

其中 H_j 为节点 j 的绝对水压.将方程(7)记为矩阵形式 $AH + D = 0$,其中 H 为管网中节点绝对水压向量, A 为系数矩阵.设 $B = -A^{-1}$,则节点水压与节点流量的线性关系可表示为

$$H = BD \tag{8}$$

方程(8)即为节点流量与节点水压之间的线性表达式.

2.3 管段流量与节点流量之间的线性表达式

将管段流量用节点流量进行线性表达时,需要利用确定性水力模型的管段方程形式.利用管段方程描述管网水力模型时,需要用到能量方程、连续性方程,对于多水源管网还要用到虚环方程.由于方程(3)和(4)与方程(2)中的未知量类型不一致,所以需要进行未知量的统一.将方程(5)代入方程(3)和(4)得到以管段流量为未知量的环方程及虚环方程

$$L_R = LEr \tag{9}$$

$$L_{SR} = L_S Er \tag{10}$$

$$L_R q = 0 \tag{11}$$

$$L_{SR} q + \Delta H = 0 \tag{12}$$

式中 E ——单位阵; r —— r_{ij} 组成的列向量.

对于多水源管网,每个水源节点的出流量也是未知量,所以方程(2)对于多水源管网需要修改为

$$\begin{bmatrix} J \\ E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ D_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_J \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{13}$$

式中 D_S ——水源节点出流量列向量; D_J ——非水源节点的节点流量列向量.将式(10)(11)(13)合并得

$$\begin{bmatrix} J & \mathbf{0} \\ L_R & \mathbf{0} \\ L_{SR} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ D_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_J \\ \mathbf{0} \\ \Delta H \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

(14)

将方程(14)记为矩阵形式 $CX + Y = 0$. 设 $G = -C^{-1}$, 则管段流量与节点流量的线性关系可表示为

$$X = GY \tag{15}$$

则方程(15)即为管段流量与节点流量之间的线性表达式.

2.4 概率水力模型求解

通过方程(8)和(15)获得了节点水压、管段流量与节点流量之间的线性关系. 由于节点流量为服从正态分布的随机变量, 根据有限个正态分布随机变量之和仍然服从正态分布这一性质, 可知节点水压、管段流量、水源节点流量也服从正态分布^[12], 并且节点水压 H_i 服从 $N(\sum_{j=1}^n b_{ij}\mu_i, \sum_{j=1}^n b_{ij}^2\sigma_{ij}^2)$ 分布, 其中 μ_i 和 σ_i 分别为节点 i 的节点流量 D_i 的数学期望和标准差, b_{ij} 为系数矩阵 B 的元素. 管段流量及水源节点流量 x_i 服从 $N(\sum_{j=1}^n g_{ij}\mu_i, \sum_{j=1}^n g_{ij}^2\sigma_{ij}^2)$ 分布, 其中 μ_i 和 σ_i 分别为 y_i 的数学期望和标准差, g_{ij} 为系数矩阵 G 的元素.

利用上面描述的方法可以求得节点水压、管段流量、水源节点出流量的数学期望及标准差, 从而获得管网工况参数的概率分布.

3 计算实例及随机试验验证

3.1 算例数据及试验方法

算例管网有 13 个用水节点, 2 个水源节点, 20 条管段, 1 台水泵. 管网拓扑结构及节点参数如图 1 所示, 管段参数如表 1 所示. 采用概率水力模拟方法对算例管网进行概率模拟, 并采用随机试验方法对计算结果进行检验. 对于随机试验方法, 样本数量是获得准确计算结果的一个关键参数. 以往的随机试验^[13-14]证明, 当样本数量为 3 000 时, 计算结果的偏差非常小, 求得的节点水压数学期望值及标准差可以认为是真值. 本文的随机试验样本数量取 5 000. 由于采用概率水力模拟方法计算时, 将非线性的水力模型进行了线性简化, 所以会产生一定的误差, 误差会随着节点流量波动范围的增大而增大. 由于节点流量为服从正态分布的随机变量, 其波动范围可以用节点流量向量 D 的标准差向量 s 表达. 为了检验概率水力模拟方法在不同节点流量波动范围情况下的计算准确度, 对于节点流量标准差分别取高 ($s_i = D_i$)、中 ($s_i = 0.6D_i$)、低 ($s_i = 0.3D_i$) 3 个档次的数值. 通过随机试验结果与概率水力模拟方法结果的对比, 检验概率水力模拟方法的计算准确度.

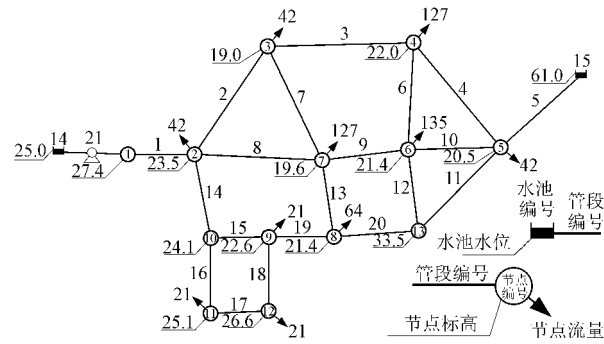


图 1 算例管网拓扑结构及节点数据

Fig. 1 Topology and node data of water supply network

表 1 算例管网管段数据

Table 1 Pipe data of water supply network					
管段编号	管段长度/m	直径/mm	管段编号	管段长度/m	直径/mm
1	240	450	11	1 372	350
2	1 524	400	12	762	250
3	1 128	300	13	823	250
4	1 189	350	14	945	300
5	640	400	15	579	300
6	762	250	16	488	200
7	945	250	17	457	150
8	1 676	350	18	503	200
9	1 128	300	19	884	200
10	884	300	20	945	300

3.2 计算结果与分析

图 2 对采用 2 种方法计算获得的节点水压概率分布曲线进行了对比, 可以看出, 当节点流量服从正态分布时, 节点水压的概率也近似服从正态分布, 即可以利用数学期望、标准差来描述节点水压的波动情况. 同

时,通过图 2(a)(b)曲线的对比可以看出,概率水力模拟得出的节点水压概率分布曲线与随机试验方法得出的概率分布曲线吻合程度良好.在节点流量的波动较小时($s_i = 0.3D_i$) 2 种方法所获得的曲线几乎完全重合.随着节点流量波动的增加($s_i = 0.6D_i$),概率水力模拟方法的计算精度有所退化,但所获得的概率分布曲线与随机试验方法获得的曲线仍然有较好的吻合程度.这说明在节点流量数学期望值附近,有一个较宽的邻域可以采用概率水力模拟方法进行节点水压概率分布的计算.但是,当节点流量标准差取高值时($s_i = D_i$),概率水力模拟结果与随机试验方法的计算结果有较大偏差.从图 2(c)(d)可以看出,2 条曲线的吻合程度较差.这说明当节点流量的波动较大时,用线性化水力模型代替非线性水力模型引入的误差对节点水压的概率水力模拟结果有较大影响.

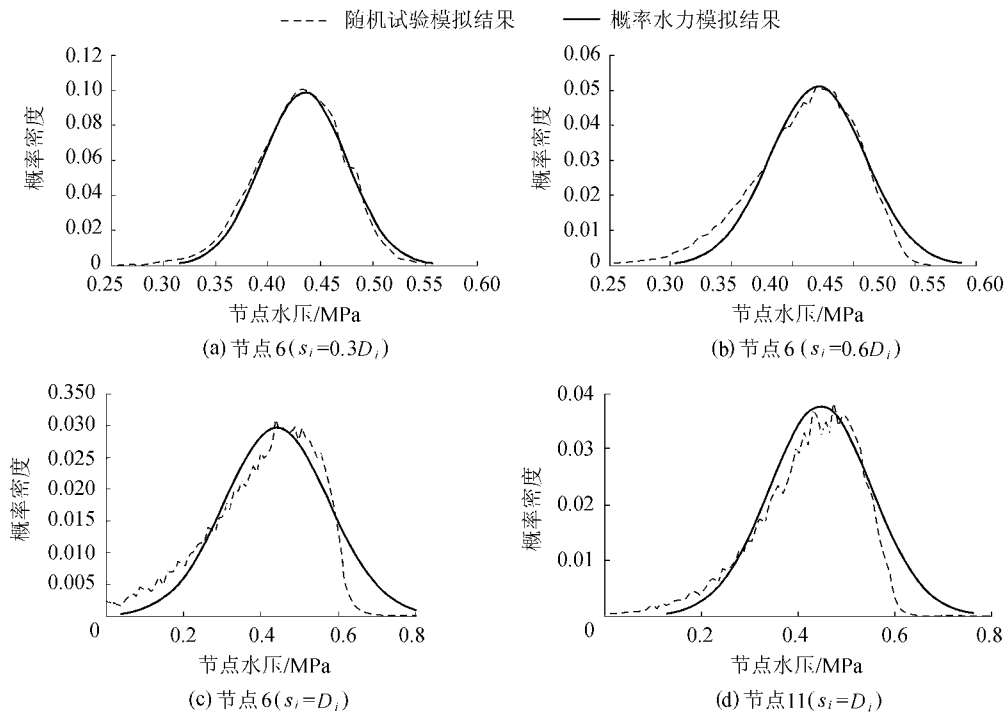


图 2 节点水压概率分布曲线计算结果对比

Fig. 2 Comparison between probability distribution curves of node head of probabilistic hydraulic simulation and Monte Carlo simulation

图 3 对采用 2 种方法计算获得的管段流量(以管段 15 为例)及水源节点出流量(以节点 14 为例)的概率分布曲线进行了对比.相比于节点水压计算结果,管段流量及水源节点出流量的计算结果吻合得更好.即便是在节点流量标准差取高值的情况下,2 种计算方法获得的概率分布曲线仍然有很好的吻合程度.

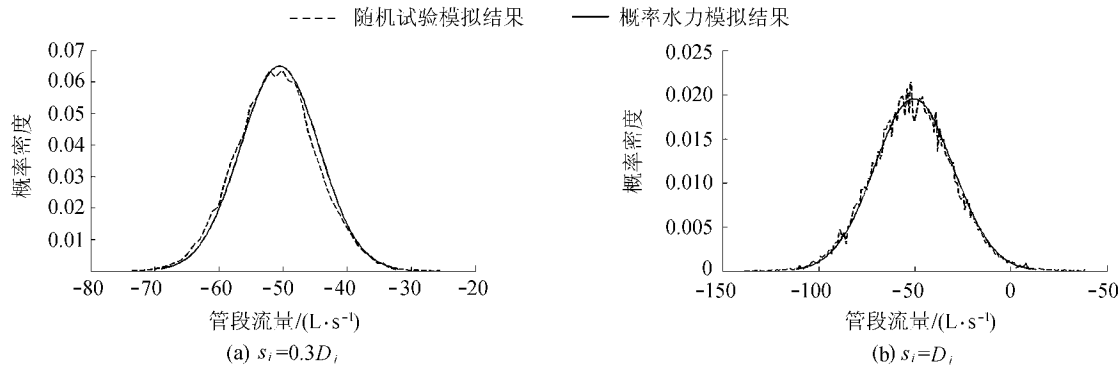


图 3 管段流量概率分布曲线计算结果对比

Fig. 3 Comparison between probability distribution curves of pipe flow of probabilistic hydraulic simulation and Monte Carlo simulation

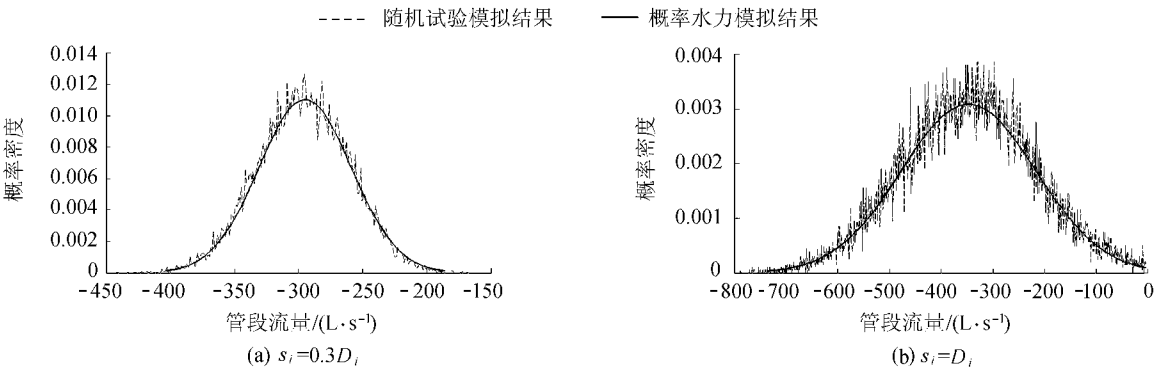


图 4 水源节点出流量概率分布曲线计算结果对比
Fig. 4 Comparison between probability distribution curves of source node outflow of probabilistic hydraulic simulation and Monte Carlo simulation

管段流量及水源节点出流量的概率水力模拟结果在节点流量取高值时较节点水压有更好的吻合度, 主要是因为压降方程中指数 $n > 1$, 所以式 (1) 的 $q \sim h$ 曲线为上凹曲线。如图 5 所示, 压降方程线性化以后, 管段对应的 $r_{ij} > 1$, 使得管段水头损失的计算结果较非线性水力模型的计算结果偏差较大, 从而导致节点水压的计算误差增加。而管段流量计算结果较非线性水力模型的计算结果偏差较小, 并且水源节点出流量的概率分布曲线和与其相连管道的管段流量概率分布曲线相同, 所以水源节点出流量在水力模型线性化后产生的误差也相对较小。计算结果的对比说明, 对于管段流量及水源节点出流量, 有一个更宽的邻域可以采用概率水力模拟方法进行管段流量及水源节点出流量的概率分布计算。

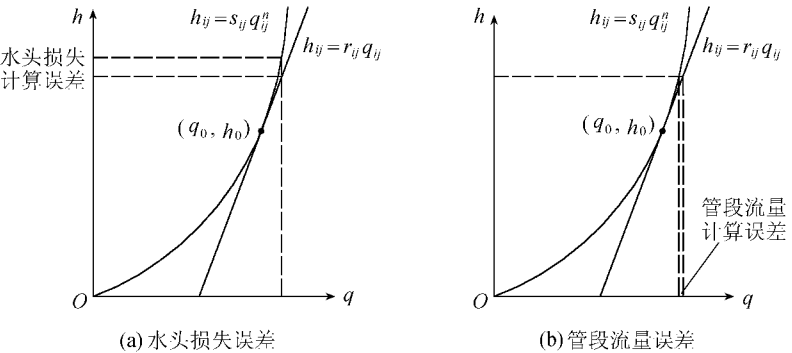


图 5 水力模型线性化后水头损失、管段流量计算误差示意图
Fig. 5 Sketch of calculation error of head loss and pipe flow after linearizing hydraulic model

4 结 语

将确定性水力模型线性化, 可以获得节点水压及管段流量的节点流量线性组合表达式。利用这种线性组合表达式, 可以通过节点流量的概率分布特性计算出节点水压及管段流量的概率分布。随机试验方法验证结果表明, 概率水力模型计算结果与随机试验方法计算结果吻合良好。不同档次的节点流量标准差取值试验验证结果表明, 在节点流量数学期望值附近有一个较宽的邻域可以采用概率水力模拟方法计算节点水压、管段流量、水源节点出流量的概率分布。

相对于随机试验方法, 概率水力模拟方法提高了计算效率。相对于联合概率分布求解方法, 概率水力模拟方法的计算过程有了很大程度的简化, 编程相对简洁, 更加适用于管网可靠性评价及供水管网优化设计等问题的求解。

参考文献:

[1] XU C, GOULTER I. Uncertainty analysis of water distribution networks[C]//Proceeding of 7th IAHR International Symposium on Stochastic Hydraulics, Queensland Australia :A. A. Balkema, 1996 :609-616.

- [2] KANG D S ,PASHA M F ,LANSEY K. Approximate methods for uncertainty analysis of water distribution systems[J]. Urban Water , 2009 , 6(3) 233-249.
- [3] PASHA M F ,LANSEY K. Analysis of uncertainty on water distribution hydraulics and water quality[C]//Proceedings of the 2005 World Water and Environmental Resources Congress. Alaska ,United States :Curran Associates Inc. , 2005 375-382.
- [4] BRANISAVLJEVIC N ,IVETIC M. Fuzzy approach in the uncertainty analysis of the water distribution network of Becej[J]. Civil Engineering and Environmental Systems ,2006 ,23(3) 221-236.
- [5] LANSEY K ,SHORBAGY W ,AHMED I. Calibration assessment and data collection for water distribution networks[J]. Journal of Hydraulic Engineering ,2001 ,127(4) 270-279.
- [6] TOLSON B A ,MAIER H R ,Simpson A R. Genetic algorithms for reliability-based optimization of water distribution system[J]. Journal of Water Resources Planning and Management ,2004 ,130(1) 63-72.
- [7] CHUNG G ,LANSEY K ,BAYRAKSAN G. Reliable water supply system design under uncertainty[J]. Environmental Modeling & Software , 2009 ,24 :449-462.
- [8] SURENDRANA S ,TANYIMBOHA TT ,TABESHB M. Peaking demand factor-based reliability analysis of water distribution systems[J]. Advances in Engineering Software ,2005 ,36 :789-796.
- [9] XU C ,GOULTER I. Probabilistic model for water distribution reliability[J]. Journal of Water Resources Planning and Management ,1998 , 124(4) 218-228.
- [10] BABAYAN A V ,KAPELAN Z ,SAVIC D A. Least cost design of robust water distribution networks under demand uncertainty[J]. Journal of Water Resources Planning and Management ,2005 ,131(5) 375-382.
- [11] 赵洪宾. 给水管网系统理论与分析[M]. 北京 :中国建筑工业出版社 ,2003 :51-53.
- [12] MEYER P L. 概率论及统计应用[M]. 潘孝瑞 ,译. 北京 :高等教育出版社 ,1986 :76-78.
- [13] DERYA S ,LANSEY K. Effect of uncertainty on water distribution system model design decisions[J]. Journal of Water Resources Planning and Management ,2009 ,135(1) 38-47.
- [14] KAPELAN Z ,SAVIC D A ,WALTERS G A. Calibration of water distribution hydraulic models using a Bayesian-Type procedure[J]. Journal of Hydraulic Engineering ,2007 ,133(8) 927-936.

Probabilistic hydraulic simulation of water supply network by linearized deterministic hydraulic model

JIN Xi

(School of Civil Engineering and Architecture , Wuhan University of Technology , Wuhan 430070 , China)

Abstract : Since many parameters in a water supply network hydraulic model are random variables , and deterministic hydraulic models cannot simulate the fluctuation of nodal heads and pipe flows according to the fluctuation of these random parameters , hydraulic simulation can only obtain results according to certain input parameters. Through linearizing the deterministic hydraulic model at the expected values of nodal flows , the nodal heads and pipe flows can be formulated as linear combinations of nodal flows. The probability density curves of nodal heads and pipe flows can be calculated using the expected values and variances of nodal flows. Example verification shows that the results of probabilistic hydraulic simulation are accordant with those of Monte Carlo simulation. This indicates that near the expected values of nodal flows , the linearized deterministic hydraulic models can be used for probabilistic hydraulic simulation of water supply networks.

Key words : water supply network ; hydraulic model ; linearization ; probabilistic simulation