

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2011.05.015

基于分数阶的建筑物预测控制方法

蒋 扬,周星德,王 玉,刘谦敏,石星星,刘广波

(河海大学力学与材料学院,江苏 南京 210098)

摘要:针对用整数阶模型代替实际复杂的非整数阶模型来进行控制器设计往往造成较大误差而收不到较好的控制效果的问题,为了能够在实际工程中获得良好的控制效果,以 5 层框架结构为对象,把分数阶模型引入到预测控制系统中,研究了基于位移响应的分数阶预测控制方法,具体包括:基于位移响应的传递函数的推导,分数阶微分算子的整数阶近似,分数阶预测控制器的设计以及仿真分析.仿真结果表明,采用该控制方法对结构振动位移响应等具有较好的控制效果.

关键词:分数阶 预测控制 位移响应 框架结构

中图分类号: TU311.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1980(2011)05-0556-05

预测控制是一种基于模型并且对于模型的精度要求不高却具有较高的控制性能的先进控制方法,它直接产生于工业过程控制应用中,并在工业实践中不断发展和完善^[1-2]. Richalt 于 1978 年首次阐述了预测控制算法产生的背景、机理以及应用效果^[3]. 预测控制主要包括 3 个要素:预测模型,滚动优化,反馈控制.由于预测控制采用的是有限时域滚动优化方法,从而保证了其具有良好的控制效果.

目前,预测控制的研究主要针对整数阶模型,然而,研究发现大多实际动力系统都为非整数阶模型,如黏滞系统、电解质极比、电磁波等,而用整数阶模型来描述分数阶模型会使数学模型与实际系统之间产生较大的误差.将分数阶微分算子引入到动力系统中特别是非线性动力系统中能够获得较好的模型,这种把分数阶微积分理论推广到控制理论中,即为分数阶控制理论^[4]. Jelacic 等^[5]针对分数阶对象的最优控制问题提出了最优化条件和解决方案;Merrikh-Bayat 等^[6]将根轨迹法扩展到分数阶线性时不变系统.目前,有关分数阶系统控制的研究主要集中于 PID 单自由度控制系统^[7-9],包括分数阶控制系统的仿真^[10]、优化^[11]、新控制策略^[12]等.

为了能够在实际工程控制中获得良好的控制效果,笔者把分数阶模型引入到预测控制系统中,并推导出分数阶预测控制的方法,研究了基于位移响应的分数阶预测控制方法,主要包括基于位移响应的传递函数推导、分数阶的整数阶近似、控制器设计及仿真 4 个步骤.

1 基于位移响应的分数阶近似

在传统建模中,一般假设结构阻尼与位移的一阶导数成正比,即阻尼力为 $C\dot{x}(t)$,而实际的阻尼力应为 $C[x(t)]^{(\alpha)}$, $[x(t)]^{(\alpha)}$ 表示 $x(t)$ 的 α 阶导数,注意:这里的 α 是分数.设在地震作用下含比例阻尼的分数阶动力系统的振动方程为

$$M\ddot{X}(t) + C[X(t)]^{(\alpha)} + KX(t) = Bu(t) - M\Gamma\ddot{x}_g(t) \tag{1}$$

式中: $X(t)$ —— $n \times 1$ 维位移状态矢量; M, C, K —— 建筑物质量、阻尼和刚度矩阵,均为 $n \times n$ 维矩阵; $\ddot{x}_g(t)$ —— 地震波的加速度; B —— $n \times p$ 维的作动器的定位矩阵, p 是作动器的个数; $u(t)$ —— $p \times 1$ 维的控制力矢量; Γ —— $n \times 1$ 维的地震作用影响矢量.由于在多自由度系统中,振型 Φ 对于质量矩阵 M 和刚度矩阵 K 是正交的,同时假设阻尼为比例阻尼.引入 $n \times 1$ 维矢量 $Z(t)$,则令

$$X(t) = \Phi Z(t) \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)中,并左乘 Φ^T , Φ 为 $n \times n$ 维的振型矩阵.可得

$$M_r\ddot{Z}(t) + C_r[Z(t)]^{(\alpha)} + K_rZ(t) = \Gamma_r\ddot{x}_g(t) + B_ru(t) \tag{3}$$

其中 $M_r = \Phi^T M \Phi \quad C_r = \Phi^T C \Phi \quad K_r = \Phi^T K \Phi \quad \Gamma_r = -\Phi^T M \Gamma \quad B_r = \Phi^T B$

式(3)包含 n 个单自由度系统,可表示为

$$M_{ri}\ddot{z}_i(t) + C_{ri}[z_i(t)]^{(\alpha)} + K_{ri}z_i(t) = \Gamma_{ri}\ddot{x}_g(t) + B_{ri}u(t) \quad (i = 1,2,3,\cdots,n) \tag{4}$$
$$M_{ri} = M_r(i,i) \quad C_{ri} = C_r(i,i) \quad K_{ri} = K_r(i,i)$$

式中: B_{ri} —— B_r 的第 i 行元素; $\Gamma_{ri}, z_i(t)$ ——矢量 Γ_r 和 $Z(t)$ 的第 i 个元素; M_{ri}, C_{ri}, K_{ri} ——质量矩阵 M_r 、阻尼矩阵 C_r 、刚度矩阵 K_r 中的第 i 行 i 列的元素。

令 $\bar{u}_i = \Gamma_{ri}\ddot{x}_g(t) + B_{ri}u(t)$,代入式(4),得

$$M_{ri}\ddot{z}_i(t) + C_i[z_i(t)]^{(\alpha)} + K_{ri}z_i(t) = \bar{u}_i(t) \tag{5}$$

当初始状态为零时,对式(5)进行 Laplace 变换,可得

$$G_i(s) = \frac{Z_i(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{s^2 + C_{ri}^{(\alpha)}s + K_{ri}} \tag{6}$$

式中: $G_i(s)$ ——整个系统中输入为 $\bar{u}_i(t)$ 、输出为 $z_i(t)$ 的第 i 个单自由度系统的传递函数; s ——Laplace 变换算子。由于不能直接对含分数阶的系统进行控制器设计,所以必须采用滤波器先对式(6)中的分数阶 $s^{(\alpha)}$ 进行滤波近似。本文采用 Oustalop 等^[13]提出的算法,假设拟合频率段为 (ω_l, ω_h) ,则 $s^{(\alpha)}$ 可构造如下滤波器的传递函数:

$$G_f(s) = K_f \prod_{j=-N}^N \frac{s + \omega'_j}{s + \omega_j} \tag{7}$$

其中

$$K_f = \omega_h^\alpha \quad \omega'_j = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{j+N+0.5(1-\alpha)}{2N+1}} \quad \omega_j = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{j+N+0.5(1+\alpha)}{2N+1}}$$

式中: N ——整数 $2N+1$ ——滤波器的阶次。用式(7)的 $G_f(s)$ 代替式(6)的 $s^{(\alpha)}$,则传递函数 $G_i(s)$ 可近似为

$$\bar{G}_i(s) = \frac{s^{(n_i)} + a_1 s^{(n_i-1)} + \cdots + a_{n_i-1} s + a_{n_i}}{s^{(n_i)} + b_1 s^{(n_i-1)} + \cdots + b_{n_i-1} s + b_{n_i}} \tag{8}$$

式中 n_i 为正整数。把式(8)转换为状态方程表示:

$$\begin{cases} \dot{v}_i(t) = A_i v_i(t) + \tilde{B}_i \bar{u}_i(t) \\ z_i(t) = C_i v_i(t) \end{cases} \quad (i = 1,2,3,\cdots,n) \tag{9}$$

式中: $v_i(t), \tilde{B}_i$ —— $n_i \times 1$ 维列向量; C_i —— $1 \times n_i$ 维行向量; A_i —— $n_i \times n_i$ 维矩阵。

把 $\bar{u}_i(t) = \Gamma_{ri}\ddot{x}_g(t) + B_{ri}u(t)$ 代入式(9),可得

$$\begin{cases} \dot{v}_i(t) = A_i v_i(t) + B_i u(t) + E_i \ddot{x}_g(t) \\ z_i(t) = C_i v_i(t) \end{cases} \quad (i = 1,2,3,\cdots,n) \tag{10}$$

其中

$$B_i = \tilde{B}_i B_{ri} \quad E_i = \tilde{B}_i \Gamma_{ri}$$

将式(10)组装为整体状态方程,即

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = AV(t) + Bu(t) + E\ddot{x}_g(t) \\ Z(t) = CV(t) \end{cases} \tag{11}$$

其中

$$V(t) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} \quad Z(t) = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$
$$A = \text{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_n) \quad C = \text{diag}(C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

2 预测控制器设计

设控制输出方程为

$$Y(t) = LX(t) \tag{12}$$

式中: $Y(t)$ —— $r \times 1$ 维的列向量; L —— $r \times n$ 维的观测矩阵,即全由 0 或 1 组成的矩阵,其中 $0 < r \leq n$; $X(t)$ —— $n \times 1$ 维楼层位移响应。若采用无时滞预测控制设计,由式(2)可得控制对象状态方程为

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = AV(t) + Bu(t) + E\ddot{x}_g(t) \\ Y(t) = L\Phi CV(t) \end{cases} \tag{13}$$

设离散周期为 T , 且设 $H = L\Phi C$, 则离散化状态方程为

$$\begin{cases} V(k+1) = A_d V(k) + B_d U(k) + P_1 w(k+1) + P_2 (w(k+1) - w(k)) \\ Y(k) = H V(k) \end{cases} \tag{14}$$

其中
$$A_d = e^{AT} \quad B_d = P_1 B \quad P_1 = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \quad P_2 = -\frac{1}{T} \int_0^T e^{A\tau} \tau d\tau$$

式中: $w(k)$ ——地震波; $U(k)$ ——作动器控制力。

选取预测步长为 λ , 在采样时刻 kT 假设理想输出序列 $Y_r(k)$ 为零且在 $[kT, (k+\lambda)T]$ 时段内采用阶跃控制力, 取相应维数的半正定权矩阵 $Q(j)$ ($j=1, 2, \cdots, \lambda-1$) 和正定权矩阵 R , 定义费用函数为

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\lambda} [Y(k+j|k) - Y_r(k+j|k)]^T Q(j) [Y(k+j|k) - Y_r(k+j|k)] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\lambda} U^T(k|k) R U(k|k) \tag{15}$$

则可得 kT 时刻的控制力为

$$U(k) = -\beta^{-1} \alpha \bar{Z}(k) + \beta^{-1} \vartheta(k) \tag{16}$$

其中
$$\begin{cases} \beta = \sum_{j=1}^{\lambda} \tilde{T}^T(j) H^T Q(j) H \tilde{T}(j) + R \\ \alpha = \sum_{j=1}^{\lambda} \tilde{T}^T(j) H^T Q(j) H \tilde{S}(j) \\ \vartheta(k) = \sum_{j=1}^{\lambda} \tilde{T}^T(j) H^T Q(j) Y_r(k+j) \\ \tilde{S}(j) = A_d^j \\ \tilde{T}(j) = (I + A_d + A_d^2 + \cdots + A_d^{j-1}) B_d \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots, \lambda)$$

3 仿真计算实例

以 5 层剪切型框架结构作为研究对象(图 1), 取 L 为 5×5 维的单位矩阵, 即以各楼层的位移为控制输出。在楼层 1, 2 布置作动器。初始处于静止状态, 外部激励为水平方向的地震荷载, 选择 Elcentro 波作为水平方向激励, 结构阻尼比为 0.02; 各楼层的质量均为 320 t, 刚度为 43 MN/m。选择分数阶 α 分别为 0.8, 0.85, 0.9, 其含义为: 若 $\alpha = 0.9$, 表示阻尼力与位移的 0.9 阶导数成正比。因为数据很多, 仅列出 $\alpha = 0.9$ 的部分代表性结果。在采用分数阶微分滤波器近似时, 考虑到建筑结构的特点, 选择的拟合频率段为 (0.001 rad/s, 100 rad/s), $N = 2$, 即滤波器的阶次为 7。在控制器的设计中, 所采用的预测步长 $\lambda = 4$ 。式(15)定义的费用函数中的权矩阵选择为: Q 为 35 维对角矩阵, 其对角线上的元素均为 2×10^{12} , R 为 2×2 阶对角矩阵, 其对角线上的元素均为 1。当地震波为 Elcentro 波, $\alpha = 0.9$ 时, 各层的位移控制结果见表 1。

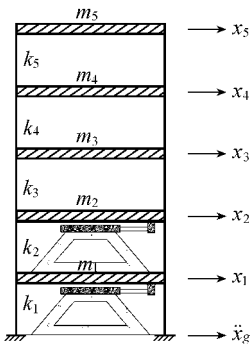


图 1 5 层框架结构

表 1 分数阶预测控制法各楼层位移响应的控制结果

Table 1 Control results of displacement response of each storey using fractional-order predictive control method

楼层	未控制		控制后	
	峰值/m	均方差/m	峰值/m	均方差/m
1	0.075 2	1.229 7	0.008 8	0.094 5
2	0.144 2	2.359 9	0.016 8	0.181 3
3	0.201 6	3.298 8	0.023 5	0.253 4
4	0.242 7	3.970 5	0.028 3	0.305 0
5	0.264 1	4.320 5	0.030 8	0.331 8

Fig. 1 Sketch of five-storey frame structure

以第2楼层为例,控制效果见图2,第2作动器控制力时程曲线见图3.

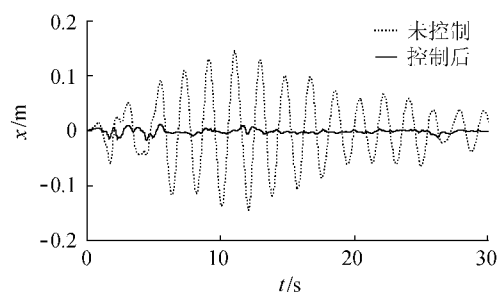


图2 第2楼层位移响应控制效果

Fig. 2 Control effect of displacement response of second storey

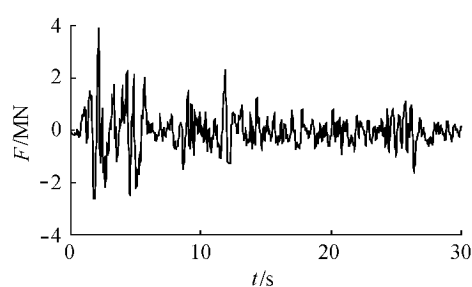


图3 第2作动器控制力时程曲线

Fig. 3 Time-history curve of control force of second controller

从图2和图3可以看出,本文提出的控制方法的控制效果非常好.同时,笔者对于 α 为0.8,0.85时也进行了仿真,控制效果依然非常好.

4 结 语

a. 在分数阶预测控制实现过程中,由于实际系统的自由度多,维数较高,不利于控制的实现,因此,可以用模态降阶法等首先对系统进行降阶.同时,用整数阶近似分数阶时传递函数阶数可能较高,从而导致所设计的控制器阶数较高,也可以先对该控制器进行降阶处理,然后再进行设计.

b. 实际测量响应多为加速度响应,要获得位移响应,需要重构系统,这既复杂又易产生额外的误差,因此可以采用加速度输出等进行控制器的设计.

参考文献:

- [1] HENSON M A, MICHAEL A. Nonlinear model predictive control: current status and future directions [J]. Computer and Chemical Engineering, 1998, 23(2): 187-202.
- [2] 陈虹, 刘志远, 解小华. 非线性模型预测控制的现状与问题 [J]. 控制与决策, 2001, 16(4): 385-391. (CHEN Hong, LIU Zhi-yuan, XIE Xiao-hua. Nonlinear model predictive control: the state and open problems [J]. Control and Decision, 2001, 16(4): 385-391. (in Chinese))
- [3] 诸静. 智能预测控制及其应用 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2000.
- [4] 周星德, 姜冬菊. 结构振动主动控制 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [5] JELICIC Z D, PETROVACKI N. Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010, 38(6): 571-581.
- [6] MERRIKH-BAYAT F, AFSHAR M, KARIMI-GHARTEMANI M. Extension of the root-locus method to a certain class of fractional-order systems [J]. ISA Transactions, 2009, 48(1): 48-53.
- [7] HAMAMCI S E. Stabilization using fractional-order PI and PID controllers [J]. Nonlinear Dynamics, 2008, 51(2): 329-343.
- [8] SILVA M F, MACHADO J A. Fractional order PD_α joint control of legged robots [J]. Journal of Vibration and Control, 2006, 12(12): 1483-1501.
- [9] CAI Xin, LIU Fa-wang. Numerical simulation of the fractional-order control system [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2007, 23(1/2): 229-241.
- [10] CAO Jun-yi, CAO Bing-gang. Design of fractional order controller based on particle swarm optimization [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2006, 4(6): 775-781.
- [11] WEI Lin. Global existence theory and chaos control of fractional differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2007, 33(2): 709-726.
- [12] LI Li, YU Fa-jun, LIU Xiao-dong. Feedback control of fractional nonlinear differential algebraic systems with Hamiltonian function method [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 197: 904-913.
- [13] OUSTALOP A, LEVRON F, MATHIEU B, et al. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis [J]. IEEE TCS-I: Fundamental Theory and Application, 2000, 47(1): 25-39.

Predictive control method of building structure based on fractional order

JIANG Yang, ZHOU Xing-de, WANG Yu, LIU Qian-Min, SHI Xing-xing, LIU Guang-bo
(College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract : Aimed at the fact that a large error exists and a good control effect cannot be obtained when the integer order model is used to design controller, through introducing the fractional-order model into the predictive control system, a fractional-order predictive control method is proposed based on the displacement response. The research process of the method includes four main steps : the deduction of transfer function, the integer-order approximation of fractional-order differential operators, the fractional-order predictive controller design, and numerical simulation. A five-storey frame structure is used as an example to illustrate the control effect of the proposed control method. The simulated results show that the fraction-order predictive control method can obtain a better control effect.

Key words : fractional order ; predictive control ; displacement response ; frame structure

《水利水电工程学报》更改刊期及征稿启事

《水利水电工程学报》创刊于 1979 年,是水利部主管,南京水利科学研究院主办的学术性科技期刊.《水利水电工程学报》为“ 全国中文核心期刊 ’和‘ 中国科技核心期刊 ”,同时被《中国学术期刊综合评价数据库》、《中国期刊全文数据库》、美国《剑桥科学文摘(自然科学)》等国内外多家数据库和检索机构收录.

随着《水利水电工程学报》影响力的不断扩大和众多作者的积极投稿,现行出版周期已不能满足读者和作者的需求.为了让更多的读者及时了解国内外有关水利水电、水运交通、海洋工程、岩土工程、水文水资源等相关领域的最新研究成果与前沿动态,进一步加强学术和技术交流,2011 年 8 月,报经水利部同意,江苏省新闻出版局审核批准,从 2012 年起,《水利水电工程学报》的刊期由季刊更改为双月刊.热忱欢迎业内专家学者、科技人员和高校师生踊跃投稿.

电话 025-85829135 传真 025-85829130 E-mail jnhri@nhri.cn
通信地址 南京市鼓楼区虎踞关 34 号 邮编 210024