

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2012.01.012

基于通量差分裂的圣维南方程组离散方法

向小华^{1 2}, 吴晓玲^{1 2}, 王春艳³, 王船海^{1 2}

(1. 河海大学水文水资源学院, 江苏 南京 210098 2. 河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏 南京 210098 ;
3. 北京中水新华国际工程咨询有限公司, 北京 100044)

摘要 : 为了提高一维河道水流模拟精度, 以通量差分裂格式为基础, 从波动守恒角度出发, 结合限制器和熵修正等数值技术构建了一种理论基础较强且计算稳定的圣维南方程组高精度离散方法. 标准的一维溃坝算例表明, 该方法在处理含激波流动问题时具有可靠的稳定性. 陡坡实验水槽算例验证结果表明, 该方法在模拟跨临界流时 also 具有良好的数值精度. 该方法可以作为一维水流模拟的一种有效方法加以应用.

关键词 : 通量差分裂 ; 有限体积法 ; TVD 格式 ; 圣维南方程组

中图分类号 : TV131.4 文献标志码 : A 文章编号 : 1000-1980(2012)01-0059-04

Discrete method for Saint-Venant equations based on flux difference splitting scheme

XIANG Xiao-hua^{1 2}, WU Xiao-ling^{1 2}, WANG Chun-yan³, WANG Chuan-hai^{1 2}

(1. College of Hydrology and Water Resources, Hohai University, Nanjing 210098, China ;
2. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China ;
3. China Water International Engineering Consulting Co., Ltd., Beijing 100044, China)

Abstract : In order to improve the precision of one-dimensional river models, a high-precision discrete method for the Saint-Venant equations, which has a strong theoretical basis and is stable in computation, was proposed through combination with the numerical techniques of limiter and entropy correction based on the flux difference splitting scheme from the perspective of wave conservation. A case study of one-dimensional dam-break modeling shows that the method is reliable and stable when dealing with shocked flow. The results of verification by an experimental flume with steep slopes show that the method has high precision in simulating transcritical flow. The method is effective and can be used for one-dimensional flow simulation.

Key words : flux difference split ; finite volume method ; TVD scheme ; Saint-Venant equations

20 世纪 70 年代以来, 计算气体动力学在间断模拟方面取得了突破性进展. 20 世纪 80 年代后, Glaister 等试图将气体力学中成熟的格式移植到水流计算中^[1-3], 也取得了一些进展, 但所采用的数值方法大多侧重于理论研究, 所研究的河道大都相当简单, 所论述的方法不能直接应用于实际河道的计算. 直到近年来才有一些将现代高精度方法应用于实际河道一维模拟的研究成果^[4-6]出现. 本文以通量差分裂方法为基础, 提出了一种圣维南方程组的高精度离散方法.

1 基本方程

矩形断面棱柱河道圣维南方程组的矢量形式为

收稿日期 : 2011-01-14

基金项目 : 国家自然科学基金(51009045, 51079038, 40930635) ; 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2009CB421105) ; 中央高校基本科研业务费专项(2009B06614, 2010B00414) ; 海洋公益性行业科研专项(200905013-8) ; 水利部公益性行业科研专项(201101024)

作者简介 : 向小华(1981—)男, 湖北松滋人, 讲师, 博士, 主要从事计算水力学和水文水资源研究. E-mail : xxh_xiang@sina.com

$$U_t + F(U)_x = S \quad (1)$$

其中 $U = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}$ $F(U) = \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$ $S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - g \frac{n^2 q |q|}{hR^{4/3}} \end{bmatrix}$

式中: U_t —— U 对时间 t 的导数; $F(U)_x$ —— $F(U)$ 对空间 x 的导数; h ——水深; q ——单宽流量; g ——重力加速度; n ——河段糙率; R ——断面水力半径, 可以近似用水深 h 代替; z_b ——河底高程. 方程(1)为散度形式, 即数学上的守恒形式方程. 该方程也可以写成非守恒形式

$$U_t + AU_x = S \quad (2)$$

其中 $A = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{bmatrix}$

式中: U_x —— U 对空间 x 的导数; U ——对流速度.

2 数值方法

约定

$$\Delta f_i = f_{i,n+1} - f_{i,n} \quad \delta f_{i+1/2,n} = f_{i+1,n} - f_{i,n} \quad (3)$$

式中 $f_{i,n}$ 表示控制体 i 中 t_n 时刻变量 f 的值.

首先以简单的线性方程来说明通量差分裂的基本原理. 一种波动从 t_n 时刻传播至 t_{n+1} 时刻的情况如图 1 所示. 采用有限体积法, 假设在 t_n 时刻控制体内变量的分布如图 1(a) 所示, 考虑常系数对流方程

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (4)$$

$$F(U) = \bar{u}U$$

式中 $\bar{u}$ 为平均对流速度, 常数.

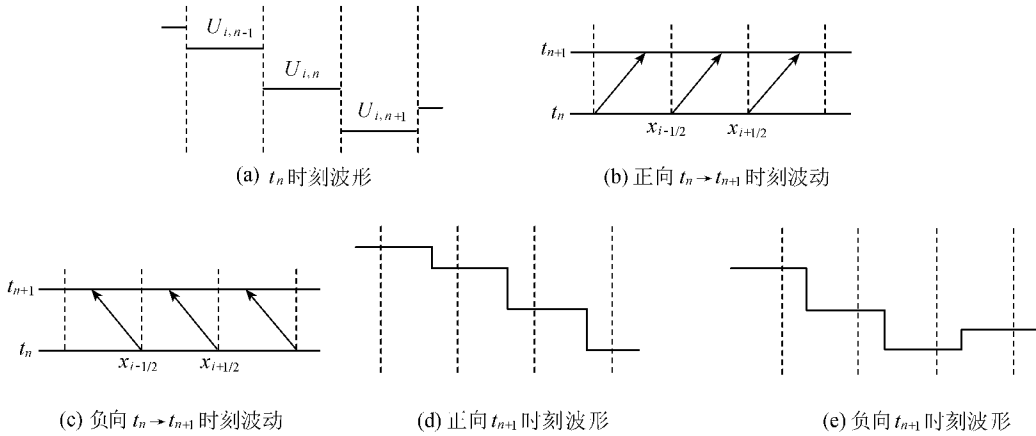


图 1 波动传播情况

Fig. 1 Sketch of wave propagation

如果 $\bar{u} > 0$, 波动正方向传播, $t_n \rightarrow t_{n+1}$ 时刻的传播情况如图 1(b) 所示, t_{n+1} 时刻的波形如图 1(d) 所示, t_{n+1} 时刻控制体 i 内变量 U 的值可以采用分段平均的方法进行计算:

$$U_{i,n+1} = \frac{\bar{u} \Delta t U_{i-1,n} + (\delta x - \bar{u} \Delta t) U_{i,n}}{\delta x_i} = U_{i,n} - \frac{\bar{u} \Delta t}{\delta x_i} \delta U_{i-1/2,n} = U_{i,n} - \frac{\Delta t}{\delta x_i} \delta F_{i-1/2,n} \quad (5)$$

其中: $\delta U_{i-1/2,n} = U_{i,n} - U_{i-1,n}$, 可以理解为变量 U 的变差; $\delta F_{i-1/2,n} = \bar{u} \delta U_{i-1/2,n} = F_{i,n} - F_{i-1,n}$.

式(5)可以理解为: 在 Δt 时段内, 控制体内平均量等于初始时刻的平均量与波动带来的变差之差, 其中变差对平均量的影响与波动速度和时间步长相关.

同理, 如果 $\bar{u} < 0$, 波动负方向传播, $t_n \rightarrow t_{n+1}$ 时刻的传播情况如图 1(c) 所示, t_{n+1} 时刻的变量分布如图 1(e) 所示, t_{n+1} 时刻控制体 i 的变量

$$U_{i,n+1} = U_{i,n} - \frac{\bar{u} \Delta t}{\delta x_i} \delta U_{i+1/2,n} = U_{i,n} - \frac{\Delta t}{\delta x_i} \delta F_{i+1/2,n} \quad (6)$$

将式(5)和式(6)相结合则可以写成通用形式

$$U_{i,n+1} = U_{i,n} - \frac{\Delta t}{\delta x_i}(\bar{u}^+ \delta U_{i-1/2,n} + \bar{u}^- \delta U_{i+1/2,n}) = U_{i,n} - \frac{\Delta t}{\delta x_i}(\delta F_{i-1/2,n}^+ + \delta F_{i+1/2,n}^-)$$
$$\bar{u}^+ = \max(\bar{u}, 0) \quad \bar{u}^- = \min(\bar{u}, 0) \quad \delta F^+ = \bar{u}^+ \delta U \quad \delta F^- = \bar{u}^- \delta U$$

(7)

由式(7)的定义可得

$$\delta F_{i-1/2} = \delta F_{i-1/2}^+ + \delta F_{i-1/2}^-$$

(8)

式(8)的含义是,可根据波动的方向将界面通量差分裂为 2 部分,只有波动进入控制体的通量差对控制体具有贡献.从式(7)和式(8)可知,随着时间的推移,控制体内变量平均值的变化完全由时段内进入控制体的通量差确定.

以上述离散方法的原理为基础,离散式(2)所示圣维南方程组,得^[7]

$$U_{i,n+1} = U_{i,n} - \frac{\Delta t}{\delta x_i}(\delta F_{i-1/2,n}^+ + \delta F_{i+1/2,n}^-) + \Delta t S_{i,n}$$

(9)

$$\delta F_{i+1/2}^+ = A_{i+1/2}^+ \delta U_{i+1/2} \quad \delta F_{i+1/2}^- = A_{i+1/2}^- \delta U_{i+1/2}$$
$$A^+ = \frac{1}{2}(A + |A|) \quad A^- = \frac{1}{2}(A - |A|) \quad |A| = R|A|LR^{-1}$$

(10)

式中: Λ ——雅可比矩阵 A 的特征值构成的对角矩阵,其中系数考虑了熵修正; L ——高精度限制器.熵修正和限制器的具体表达式见文献[7].

3 算 例

3.1 理想溃坝模型

为了检验本文所述格式的有效性,以常用理想溃坝模型为算例进行计算与分析对比.考察上游水深 1.0 m、下游水深 0.01 m 时的溃坝情况.多种格式所得溃坝 7 s 后的水位对比^[8-9]如图 2 所示.总体上看各种格式计算稳定,没有产生振荡现象.从图 2 可以看出,FOU 格式精度最差,间断分辨率最低,另外 3 种格式都具有较高的精度.计算结果表明:FD-WAF 格式精度略低,而 MUSCL 格式与本文 FDS-LW 格式精度相当,都很好地捕捉到了间断,本文格式(FDS-LW)的精度更高,间断处接近精确解,优于其他 3 种格式.

3.2 水槽试验

Tseng^[10]提出了一种地形非常不规则的水槽试验算例,算例所用水槽长 1 600 m,断面为矩形,宽 1 m,槽底地形很不规则且水槽坡度较大,水槽底部地形(表 1)类似于实际河道底部地形,水槽糙率为 0.033.

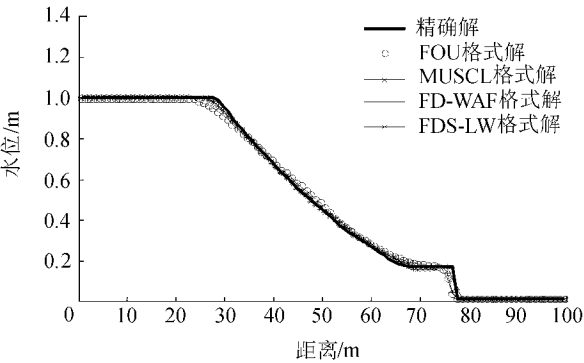


图 2 多种格式模拟水位对比

Fig. 2 Comparison of water levels in different schemes

表 1 水槽底部高程分布

Table 1 Elevation distribution at bottom of flume

	m														
x	0	176	248	368	392	416	456	504	528	552	568	584	664	768	848
$z_b(x)$	5.00	3.20	3.60	2.62	2.80	2.60	3.10	2.34	2.58	2.12	2.25	1.91	2.40	1.20	1.73
x	968	992	1016	1056	1104	1128	1152	1168	1184	1264	1368	1384	1416	1480	1600
$z_b(x)$	0.76	0.93	0.74	1.24	0.48	0.72	0.26	0.39	0.06	0.54	-0.66	-0.52	-0.82	-0.82	-1.62

本文模拟所采用的空间步长为 7.5 m, Courant 数 CFL = 0.9. 设计的水流条件为恒定流. 计算条件如下: 初始条件

$$h(x, 0) = 0.42 \text{ m} \quad u(x, 0) = 0$$

(11)

恒定边界条件

$$Q(0, t) = 0.59 \text{ m}^3/\text{s} \quad h(L, t) = 0.42 \text{ m}$$

(12)

上述条件包括跨临界流等流态. 传统的离散格式处理跨临界流存在困难^[11-12]. 图3表明, 本文方法所论述的格式在处理跨临界流时可以得到与实测值吻合程度非常好的计算结果. 这说明本文方法在处理具有复杂地形的河道水流时也具有较好的适用性.

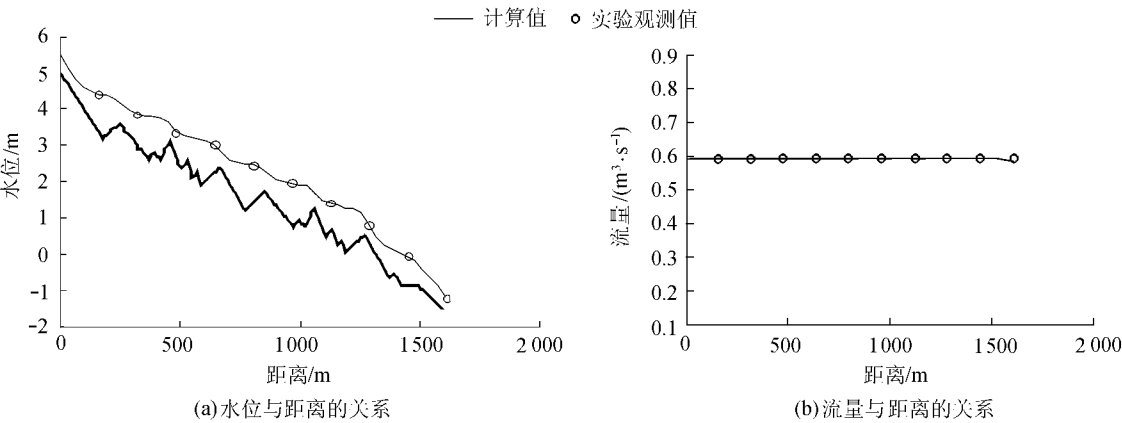


图3 不规则地形水槽恒定流模拟
Fig. 3 Irregular channel flow simulated by steady flow in flume

4 结 语

为了提高水流模型的计算精度, 本文将气体动力学方法引入水流计算中, 并通过离散得出了圣维南方程组的一般离散模型. 算例结果表明, 本文方法较目前其他一些方法有一定的优势, 可以在实际河道水流计算中加以应用.

参考文献:

[1] GLAISTER P. Approximate Riemann solutions of the shallow water equations[J]. Journal of Hydraulic Research ,1988 ,26(3) :293-306.
[2] TOMAS C R ,DELGADO A D ,ENRIQUE D F N. A family of stable numerical solvers for the shallow water equations with source terms [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg ,2003 ,192 :203-225.
[3] 王志力, 耿艳芬, 金生. 带源项浅水方程的通量平衡离散[J]. 水科学进展 ,2005 ,16(3) :373-379. (WANG Zhi-li ,GENG Yan-fen ,JIN Sheng. Flux balance method for shallow water equation with source terms[J]. Advances in Water Science ,2005 ,16(3) :373-379. (in Chinese))
[4] DELIS A I ,SKEELS C P. TVD schemes for open channel flow[J]. Int J Numer Meth Fluids ,1998 ,26 :791-809.
[5] SENKA V ,LUKA S. Upwind schemes with exact conservation property for one-dimensional open channel flow equations[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics ,2003 ,24(5) :1630-1649.
[6] BOJAN C ,LADO K ,NELIDA C. Balanced semi-implicit Roe scheme for open channel flow equation[J]. Ann Univ Ferrara ,2008 ,54 :245-258.
[7] 向小华. 基于隐式 TVD 格式的一、二维耦合流域河网模型研究[D]. 南京: 河海大学 ,2009.
[8] TORO E F. Shock-capturing methods free-surface shallow flow[M]. London :John Wiley and Sons Ltd. ,2001.
[9] ROE P L. Approximate Riemann solvers ,parameter vectors ,and difference schemes[J]. J Comput Phys ,1981 ,43(2) :357-372.
[10] TSENG M H. Improved treatment of source terms in TVD scheme for shallow water equations[J]. Advances in Water Resources ,2004 ,27 :617-629.
[11] FREITAG M ,MORTON K W. The Preissmann box scheme and its modification for transcritical flow[J]. Int J Numer Meth Engng ,2007 ,70 :791-811.
[12] 茅泽育, 相鹏, 黄江川. Preissmann 四点隐格式对计算混合流动的适定性分析[J]. 科学技术与工程 ,2007 ,7(3) :343-347. (MAO Ze-yu ,XIANG Peng ,HUANG Jiang-chuan. Study on the invalidity of Preissmann scheme for transcritical flow[J]. Science Technology and Engineering ,2007 ,7(3) :343-347. (in Chinese)).