

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2012.03.012

欧拉弯曲梁三次 Hermite 区间样条多小波有限元分析

夏逸鸣^{1,2}, 唐 敢^{2,3}, 江世永¹

(1. 解放军后勤工程学院土木工程系, 重庆 400042; 2. 南京航空航天大学土木工程系, 江苏 南京 210016;
3. 东南大学土木工程学院, 江苏 南京 210096)

摘要: 基于小波多分辨率分析思想, 选择三次 Hermite 区间样条函数作为多小波尺度基函数, 用于构建梁单元多尺度位移近似空间; 由最小势能原理, 推导出欧拉弯曲梁有限元平衡方程. 结果表明: 该小波单元可通过改变多小波尺度函数的尺度来重新划分网格, 从而可自由调节小波单元的计算精度; 其计算精度与采用具有相同网格划分的任意多个传统欧拉弯曲梁单元求解的精度完全相同; 该小波单元更加清晰地反映了小波有限元与传统有限元之间的关联.

关键词: 三次 Hermite 区间样条函数; 尺度函数; 多小波; 有限元

中图分类号: TU375.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1980(2012)03-0313-06

Finite element analysis of Euler beam using multi-wavelets based on cubic Hermite spline function on interval

XIA Yi-ming^{1,2}, TANG Gan^{2,3}, JIANG Shi-yong¹

(1. Department of Civil Engineering, PLA Logistics Engineering College, Chongqing 400042, China;
2. Department of Civil Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;
3. School of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: Based on the wavelet multi-resolution concept, this paper presents the formulation of the Euler beam element using multi-wavelets based on the cubic Hermite spline function on the interval. According to the principle of minimum potential energy, the finite element equilibrium equation for the Euler beam was deduced. The results show that the calculation accuracy of the wavelet element could be voluntarily adjusted by changing the scaling level and grid repartitioning, and it was the same as that of traditional Euler beam elements with equivalent grids. In addition, this wavelet element presented the correlation between the wavelet finite element and traditional finite element in a more explicit manner than other wavelet elements.

Key words: cubic Hermite spline function on interval; scaling function; multi-wavelets; finite element

近十几年来, 小波有限元理论取得了许多重要成果, 并已成功地应用于机械、土木等领域^[1-3]. 针对结构中最常用的一维梁构件的计算分析, 目前已有较多的有关小波有限元的文献^[4-10], 从中可以发现, 无论是 Daubechies 小波有限元^[5,6], 还是区间三次 B 样条小波 (BSWI) 有限元^[7] 以及二代小波有限元^[8] 等, 都需要借助基函数系数与待求物理参数之间的转换矩阵关系, 来确保单元公共边界的连续性. 而转换矩阵的求解涉及矩阵的求逆, 对于高尺度、多维问题容易出现数值不稳定现象^[4]. 另外, 因 Daubechies 小波有限元、二代小波有限元等没有具体的解析函数表达式, 所以, 只能通过数值方法得到联系系数矩阵, 求解其导数, 而当小波尺度基函数的尺度达到较大的数值时, 联系系数矩阵也会出现数值不稳定现象^[4], 从而使单元刚度矩阵和质量矩阵等参量的求解精度得不到保证^[4], 且有时其求解较为困难^[7].

收稿日期: 2011-05-28
基金项目: 国家自然科学基金(51008067); 航空科学基金(2010ZA52009); 南京航空航天大学基本科研业务费项目(NS2010018, 2010ZA52009); 江苏省六大人才高峰项目、住房和城乡建设部科学技术计划项目(2011-K1-68)
作者简介: 夏逸鸣(1964—), 男, 江苏南京人, 讲师, 博士, 主要从事结构抗震研究. E-mail: yi_ming_x@yahoo.com.cn

本文选择三次 Hermite 区间样条函数作为多小波尺度基函数,用于构建梁单元的位移空间,其基函数系数与待求物理参数完全相同,因而可以避免求解转换矩阵;再者,该多小波尺度函数有较为简洁的解析函数表达式且支撑区间小,其单元刚度矩阵和质量矩阵等参量计算结果与传统的欧拉弯曲梁单元一致,所以,其推导过程,简单明了,物理意义明确,易于理解.

1 弯曲梁位移多尺度空间

1.1 多小波尺度函数

本文取三次 Hermite 区间样条函数,其表达式为^[11]:

$$\varphi_1(\xi) = \begin{cases} (\xi + 1)(1 - 2\xi) & \xi \in [-1, 0] \\ (\xi - 1)(1 + 2\xi) & \xi \in [0, 1] \\ 0 & \xi \notin [-1, 1] \end{cases} \tag{1}$$

$$\varphi_2(\xi) = \begin{cases} (\xi + 1)^2\xi & \xi \in [-1, 0] \\ (\xi - 1)^2\xi & \xi \in [0, 1] \\ 0 & \xi \notin [-1, 1] \end{cases} \tag{2}$$

三次 Hermite 区间样条函数有如下特性:

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{r-1}\varphi_s(0) = \delta_{rs} \quad \left(\frac{d}{d\xi}\right)^{r-1}\varphi_s(-1) = \left(\frac{d}{d\xi}\right)^{r-1}\varphi_s(1) = 0 \quad (r = 1, 2; s = 1, 2) \tag{3}$$

式中 δ 为 Kronecker 符号.函数 $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ 曲线如图 1 所示.

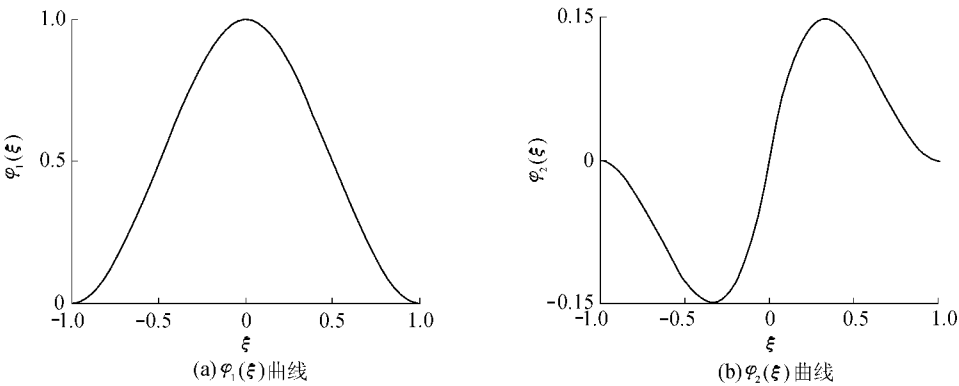


图1 三次 Hermite 区间样条函数
Fig. 1 $\varphi_1(\xi)$ and $\varphi_2(\xi)$ curves

根据小波多分辨分析理论^[12],对于长度为 l 的梁,其任意 n 尺度位移空间的基函数 Φ_n 可以取为

$$\Phi_n = [\varphi_1(n\xi), h_e\varphi_2(n\xi), \dots, \varphi_1(n\xi - k), h_e\varphi_2(n\xi - k), \dots, \varphi_1(n\xi - n), h_e\varphi_2(n\xi - n)] \tag{4}$$

其中

$$h_e = \frac{l}{n} \quad \xi = \frac{x - x_0}{h_e}$$

式中 x_0 ——梁端的整体坐标值; x ——梁上任意点的整体坐标值; k, n ——正整数.

在尺度 $n = 1, 2, \dots$ 下,本文的基函数在区间 $[0, 1]$ 上的分布如图 2 所示.

1.2 弯曲梁位移空间

由小波理论中的多分辨思想,由基函数 Φ_n 构建的尺度空间随尺度的逐级增大可形成一个相互可套、逐级包含的子空间序列.在尺度空间 n 中,基函数 Φ_n 是密集分布的,即

$$V_n := \{\Phi_n : n \in \mathbb{Z}\} \quad (V_n \subset V_{n+1}) \tag{5}$$

式中 $\mathbb{Z}$ 表示正整数.

弯曲梁的挠度可以由 n 尺度空间基函数 Φ_n 构成:

$$w_n = \Phi_n \mathbf{u}_n \tag{6}$$

其中

$$\mathbf{u}_n = ([w_0, \theta_0] \dots [w_k, \theta_k] \dots [w_n, \theta_n])^T$$

式中 w_k, θ_k 分别为节点 k 处的挠度和转角.

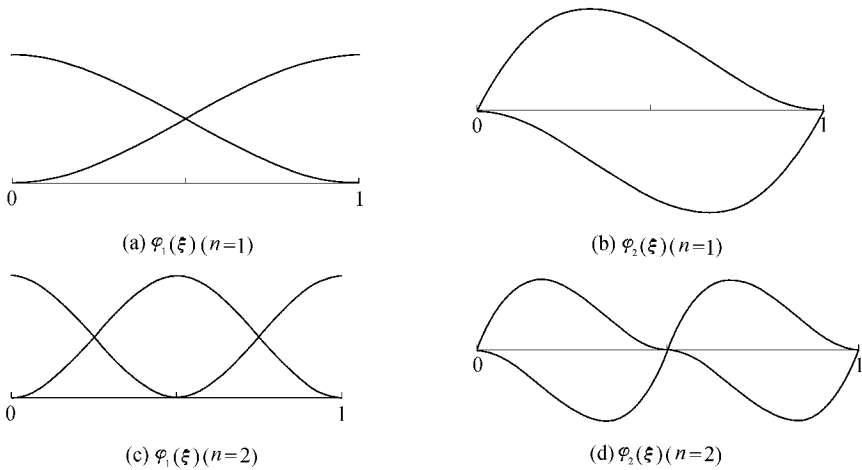


图 2 基函数 φ_1, φ_2 在区间 $[0, 1]$ 上的分布

Fig. 2 Distributions of base functions $\varphi_1(\xi)$ and $\varphi_2(\xi)$ on interval of $[0, 1]$

2 弯曲梁的平衡方程

由式 (6), 可以得到弯曲梁的总势:

$$\Pi(w_n) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 w_n}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l w_n q(x) dx - \sum_i w_n(x_i) Q_i(x_i) - \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \omega^2 w_n dx \quad (7)$$

式中: $q(x), Q_i(x_i)$ ——作用于梁单元的分布力和广义集中力; A ——梁的横截面面积; ρ ——梁的密度; ω ——梁的自振圆频率.

式 (7) 经整理后可得

$$\Pi(w_n) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_n^T \mathbf{K}_n \mathbf{u}_n - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_n^T \mathbf{M}_n \dot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n^T \mathbf{f}_n - \mathbf{u}_n^T \mathbf{F}_n \quad (8)$$

式中: $\mathbf{K}_n$ ——梁弯曲刚度矩阵; $\mathbf{M}_n$ ——梁的质量矩阵; $\mathbf{f}_n, \mathbf{F}_n$ ——等效分布力向量、广义集中力向量.

根据最小势能原理, 可以得到弯曲梁的平衡方程:

$$\mathbf{K}_n \mathbf{u}_n - \mathbf{M}_n \mathbf{u}_n = \mathbf{f}_n + \mathbf{F}_n \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{K}_n = [K_{ij}] \quad K_{ij} = \begin{bmatrix} k_{wij} & k_{w\theta ij} \\ k_{\theta wij} & k_{\theta\theta ij} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_n = [M_{ij}] \quad M_{ij} = \begin{bmatrix} m_{wij} & m_{w\theta ij} \\ m_{\theta wij} & m_{\theta\theta ij} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} k_{wij} &= \frac{EI}{l^3} \int_0^1 \varphi''(n\xi - i) \varphi''(n\xi - j) d\xi \\ k_{\theta ij} &= \frac{EI}{l^3} \int_0^1 h_e \varphi''(n\xi - i) h_e \varphi''(n\xi - j) d\xi \\ k_{w\theta ij} &= \frac{EI}{l^3} \int_0^1 \varphi''(n\xi - i) h_e \varphi''(n\xi - j) d\xi \\ k_{\theta\theta ij} &= k_{w\theta ij} \\ m_{wij} &= \rho A l \omega^2 \int_0^1 \varphi(n\xi - i) \varphi(n\xi - j) d\xi \\ m_{\theta ij} &= \rho A l \omega^2 \int_0^1 h_e \varphi(n\xi - i) h_e \varphi(n\xi - j) d\xi \\ m_{w\theta ij} &= \rho A l \omega^2 \int_0^1 \varphi(n\xi - i) h_e \varphi(n\xi - j) d\xi \\ m_{\theta\theta ij} &= m_{w\theta ij} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{ni} &= nh_e \int_0^1 \left(\varphi_1(n\xi - i) h_e \varphi_2(n\xi - i) \right)^T q(\xi) d\xi \\ F_{ni} &= \left(\varphi_1(n\xi - i) h_e \varphi_2(n\xi - i) \right)^T Q(\xi_i) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

3 讨论与算例

3.1 讨论

有一梁单元,长度为 l ,抗弯刚度为 EI ,截面积为 A ,密度为 ρ ,其上分别作用有均布荷载 q 和集中荷载 P ,求其在不同尺度空间中的刚度矩阵、质量矩阵和等效荷载.

由式 (10) 计算可知,当尺度 $n = 1$ 时,单元刚度矩阵和质量矩阵 K_n 和 M_n 分别表示为

$$K_1 = \frac{EI}{h_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h_e & -12 & 6h_e \\ & 4h_e^2 & -6h_e & 2h_e^2 \\ & & 12 & -6h_e \\ \text{对称} & & & 4h_e^2 \end{bmatrix}$$
$$M_1 = \frac{\rho Ah_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h_e & 54 & -13h_e \\ & 4h_e^2 & 13h_e & -3h_e^2 \\ & & 156 & -22h_e \\ \text{对称} & & & 4h_e^2 \end{bmatrix}$$
$$h_e = \frac{l}{1} = l$$

等效荷载可以由式 (11) 得到,即

$$f_1 = \left(-\frac{ql}{2} \quad 0 \quad -\frac{ql}{2} \quad 0 \right)^T$$
$$F_1 = \left(-\frac{P}{2} \quad 0 \quad -\frac{P}{2} \quad 0 \right)^T$$

当 $n = 2$ 时,单元刚度矩阵和质量矩阵 K_n 和 M_n 分别表示为

$$K_2 = \frac{EI}{h_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h_e & -12 & 6h_e & 0 & 0 \\ & 4h_e^2 & -6h_e & 2h_e^2 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6h_e \\ & & & 8h_e^2 & -6h_e & 2h_e^2 \\ & & & & 12 & -6h_e \\ \text{对称} & & & & & 4h_e^2 \end{bmatrix}$$
$$M_2 = \frac{\rho Ah_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h_e & 54 & -13h_e & 0 & 0 \\ & 4h_e^2 & 13h_e & -3h_e^2 & 0 & 0 \\ & & 312 & 0 & 54 & -13h_e \\ & & & 8h_e^2 & 13h_e & -3h_e^2 \\ & & & & 156 & -22h_e \\ \text{对称} & & & & & 4h_e^2 \end{bmatrix}$$
$$h_e = \frac{l}{2}$$

$$f_2 = \left(-\frac{ql}{4} \quad 0 \quad -\frac{ql}{2} \quad 0 \quad -\frac{ql}{4} \quad 0 \right)^T$$
$$F_2 = \left(-\frac{P}{4} \quad 0 \quad -\frac{P}{2} \quad 0 \quad -\frac{P}{4} \quad 0 \right)^T$$

当尺度 $n > 2$ 时,由式 (10)、式 (11) 容易得到单元刚度矩阵和质量矩阵 K_n 和 M_n 及节点等效荷载向量的表达式.

因此,可以看出,随着尺度 n 的增大、区间节段点的增加,小波单元刚度矩阵 K_n 、质量矩阵 M_n 的阶数及节点等效荷载向量的维数也随之扩展,相当于传统梁段的网格细化过程,但小波单元会自动生成各尺度下的单元刚度矩阵和质量矩阵及节点等效荷载向量,而不像传统梁单元那样因重新划分单元,而需重新生成单元刚度矩阵和质量矩阵及节点等效荷载向量,所以,小波单元的计算精度可以用尺度 n 来自由调整,其作用相当于 1 台放大镜。

由上述结果可以看出,该单个小波单元的刚度矩阵和质量矩阵 K_n 、 M_n 及节点等效荷载向量,和由相同网格划分的梁构件用传统梁单元叠加而得到梁构件整体的完全相同。这样,针对由弯曲梁单元组成的各种结构的静动力问题,本文小波单元的求解结果与用传统梁单元的求解结果完全一样。

3.2 算例

有一工字形钢(I20a)简支梁,跨度 $l = 5\text{ m}$,梁的抗弯刚度为 $E = 2.1 \times 10^5\text{ MPa}$,惯性矩 $I = 2\,370\text{ cm}^4$,截面积为 $A = 35.5\text{ cm}^2$,密度为 $\rho = 7\,800\text{ kg/m}^3$,求该梁的前三阶自振频率。

采用本文方法,整根简支梁仅用 1 个小波单元来计算,其结果见表 1。

表 1 简支梁的自振圆频率

Table 1 Natural frequencies of simply supported beam(rad/s)

单个小波 单元尺度	传统梁 单元数/个	第一自振频率/ (rad·s ⁻¹)	第二自振频率/ (rad·s ⁻¹)	第三自振频率/ (rad·s ⁻¹)
$n = 2$	2	167.81	739.15	1 672.27
$n = 4$	4	167.66	668.59	1 515.94
$n = 8$	8	167.40(167.35)	666.14(669.4)	1 499.69(1 506.15)

注:括号内的数值为精确值。

由表 1 可知,随着小波单元尺度 n 的增加,简支梁的第一、二、三自振频率逐渐趋于精确值^[13](解析解),表明可以根据需要调节尺度 n 来改变单个小波单元的计算精度。

4 结 论

- a. 本文单个小波单元可以通过增加空间尺度、对单元进行网格细分,并由此直接导出单元刚度矩阵、质量矩阵及节点等效荷载向量,从而达到提高单元计算精度的目的,其过程相当于以传统梁单元求解网格均匀细分后的弯曲梁,而且,求解结果与单个小波单元解出的完全相同。
- b. 本文小波单元的基函数系数与待求物理参数相一致,可以避免求解其他小波单元中的转换矩阵;另外,该多小波尺度函数有较为简洁的解析函数表达式而且支撑区间小,求解效率高,边界条件处理与传统梁单元一致。
- c. 本文小波单元的计算简单明了,物理意义明确,易于理解。

参考文献:

[1] 何正嘉,陈雪峰,李兵. 小波有限元理论及其工程应用[M]. 北京:科学出版社,2006.

[2] 任伟新,韩建刚,孙增寿. 小波分析在土木工程结构中的应用[M]. 北京:中国铁道出版社,2006.

[3] 王可,赵斌,石健. 有限元在星轮振动特性计算中的应用[J]. 沈阳工业大学学报,2010,32(2):162-165.(WANG Ke,ZHAO Bin,SHI Jian. Application of wavelet finite element theory in calculating vibration characteristic of gate rotor[J]. Journal of Shenyang University of Technology,2010,32(2):162-165.(in Chinese))

[4] 陈雅琴. 桥梁结构分析的广义变分原理:Daubechies 条件小波法研究[D]. 西安:长安大学,2008.

[5] 马军星,王进. 弹性地基梁小波分析[J]. 系统仿真学报,2007,19(10):2183-2185.(MA Jun-xing,WANG Jin. Wavelet finite element analysis of elastic basement beam[J]. Chineses Journal of Simulation,2007,19(10):2183-2185.(in Chinese))

[6] CHEN Xue-feng,YANG Shen-jun,HE Zheng-jia,et al. The construction of wavelet finite element and its application[J]. Finite Elem Anal Des,2004,40:541-554.

[7] XIANG Jia-wei,CHEN Xue-feng,HE Zheng-jia,et al. The construction of 1D wavelet finite element[J]. Comput Mech,2007,40:325-339.

[8] HE Yu-ming,CHEN Xue-feng,XIANG Jia-wei,et al. Adaptive multiresolution finite element method based on second generation wavelets [J]. Finite Elem Anal Des,2007,43:566-579.

[9] CHEN Xue-feng , XIANG Jia-wei , LI Bing , et al. A study of multiscale wavelet-based elements for adaptive finite element analysis[J]. Advance in Engineering Software , 2010 , 41 :196-205.

[10] 苏甘龙 , 苏青 , 彭绪清 . 梁弯曲问题的样条小波边界元法[J]. 厦门理工学院学报 , 2008 , 16(4) :57-62.(SU Gan-long , SU Qing , PENG Xu-qing. Spline wavelet boundary element method for bending beam[J]. Journal of Xiamen University of Technology , 2008 , 16(4) :57-62.(in Chinese))

[11] HAN Bing. Approximation properties and construction of Hermite interpolants and biorthogonal multiwavelets[J]. Journal of Approximation Theory , 2001 , 110 :18-53.

[12] 刘明才 . 小波分析及其应用[M]. 北京 :清华大学出版社 , 2005.

[13] 黄永玉 , 赵永刚 , 赵伟东 . 简支梁的固有频率分析[J]. 青海大学学报 , 2010 , 28(6) :20-23.(HUANG Yong-yu , ZHAO Yong-gang , ZHAO Wei-dong. Natural frequency evaluation of simple-supported beam[J]. Journal of Qinghai University , 2010 , 28(6) :20-23.(in Chinese))

· 简讯 ·

河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室
水资源高效利用与节水灌溉团队
获全国“ 农业节水科技奖 ”一等奖

近日 ,在全国农业节水技术交流暨第二届农业节水科技奖励颁奖大会上 ,河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室水资源高效利用与节水灌溉团队完成的“ 南方灌区生态节水工程建设与管理模式 ”获一等奖。

该项目由河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室水资源高效利用与节水灌溉团队副研究员罗玉峰、青年教授徐俊增、副教授王卫光等共同完成。团队与高邮市水务局、高邮灌区管理处合作 ,围绕国家粮食安全及水安全的重大需求 ,研究了南方生态灌区节水工程建设、灌区水环境与景观建设、灌区灌溉决策与用水管理和灌区管理体制与运行机制等关键技术 ,提出了清水、畅水、亲水、靓水四位一体的节水型生态灌区工程建设规划的先进理念 ,设计了生态渠道断面衬砌形式 ,开发出新型 U 形渠道衬砌设备与施工工艺 ,从灌区管理组织架构、工程管理模式、水费收取制度、环境与水景观维护等方面构建了南方生态型节水灌区管理体制与运行机制 ,成果总体达到国际先进水平。国家重点实验室水资源高效利用与节水灌溉团队在 2010 年就曾凭借“ 水稻节水灌溉理论及调控模式创新与应用 ”成果获首届农业节水科技奖一等奖。

会上 ,罗玉峰副研究员代表项目组作了学术报告 ,实验室主任彭世彰教授主持了“ 农业节水应用基础研究 ”分会场报告会。

(本刊编辑部供稿)