

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2012.04.007

基于 Delaunay 三角网的三维 Voronoi 单胞体积计算

丁道红^{1 2} 章 青^{1 2}

(1.河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室,江苏 南京 210098 2.河海大学力学与材料学院,江苏 南京 210098)

摘要 :根据 Voronoi 单胞的定义,在已知 Voronoi 单胞顶点的前提下,利用 Delaunay 三角网将 Voronoi 单胞划分成若干四面体,通过求解四面体的体积得到 Voronoi 单胞的体积,最后应用算例验证了该方法的可行性。
关键词 :Voronoi 单胞;Delaunay 三角网;四面体体积
中图分类号 :P224.2 **文献标志码 :**A **文章编号 :**1000-1980(2012)04-0397-04

An algorithm for calculating volume of 3D Voronoi cell based on Delaunay triangulation

DING Daohong^{1 2} ,ZHANG Qing^{1 2}

(1. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering ,Hohai University , Nanjing 210098 , China ;
2. College of Mechanics and Materials , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract : According to the definition of the Voronoi cell , we used the Delaunay triangulation to divide the Voronoi cell into several tetrahedrons based on the Voronoi cell vertices , and obtained the volume of the Voronoi cell by calculating the volume of this tetrahedron. The results of a sample calculation verified the applicability of the algorithm.
Key words : Voronoi cell ; Delaunay triangulation ; tetrahedron volume

Voronoi 单胞是以自然相邻插值法进行形函数构造的自然单元法的基础^[1-2]。自然单元法形函数的构造方法有 Sibson 法^[3]和 Laplace 法^[4]2 种,其中 Sibson 法是以插值点对应于某一结点的二阶 Voronoi 单胞的勒贝格测度与插值点的一阶 Voronoi 单胞的勒贝格测度的比值作为形函数。三维 Voronoi 单胞的勒贝格测度即为 Voronoi 单胞的体积,目前关于 Voronoi 单胞体积的计算最常用的方法是 Lasserre 方法^[5-8]。Lasserre 方法是在已知凸多面体控制方程的前提下,通过递推公式求得凸多面体的体积。该方法因具有简单可行、操作方便等优点而得到广泛的应用,但该方法在应用过程中要求控制方程不能存在冗余的方程。本文在与 Voronoi 单胞相对应的 Delaunay 三角网的启示下,通过 Delaunay 三角网将三维 Voronoi 单胞划分成若干个不重叠且充满 Voronoi 单胞的四面体,从而可简单地通过四面体的体积计算得到 Voronoi 单胞的体积。

1 Voronoi 单胞

对于 Voronoi 单胞的概念^[9],可通过数学方式进行描述。记 R^n 空间上任意 2 点 x_i 和 x_j 的欧氏距离为 $d(x_i, x_j)$,设 $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ 为 R^n 空间上任意 n 个互异的点,则与其中任意一点 x_i 对应的 Voronoi 单胞的定义为

$$T_i = \{x \in R^n : d(x, x_i) \leq d(x, x_j), \forall j \neq i\} \tag{1}$$

二阶 Voronoi 单胞是在 R^n 空间上任意 n 个互异的点 $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ 的基础上,增加一新的待插值点 x' ,形成

收稿日期 : 2011-07-07
基金项目 : 国家自然科学基金(10972072 , 51179064 , 11132003);河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室专项基金(2009585912)
作者简介 : 丁道红(1981 —) ,男,江苏东台人,博士研究生,主要从事计算力学与数值仿真研究。E-mail : dding_dhh@163.com

新的一阶 Voronoi 单胞,其中结点 x_I 为插值点 x' 的自然邻点,结点 x_I 的二阶 Voronoi 单胞为结点 x_I 的一阶 Voronoi 单胞与插值点 x' 的一阶 Voronoi 单胞重叠的部分,即

$$T_{x_I} = \{x \in R^n : d(x, x') \leq d(x, x_I), \forall I\} \cap \{x \in R^n : d(x, x_I) \leq d(x, x_J), \forall J \neq I\} \tag{2}$$

将具有公共边界的 Voronoi 单胞所对应的结点称为自然邻点,其公共边界为该 2 点的中垂面(二维问题为 2 点的垂直平分线),即 2 自然邻点 x_I 和 x_J 的 Voronoi 单胞公共边界所在的平面(或直线) L 为

$$(x_J - x_I) \left(x - \frac{x_I + x_J}{2} \right) + (y_J - y_I) \left(y - \frac{y_I + y_J}{2} \right) + (z_J - z_I) \left(z - \frac{z_I + z_J}{2} \right) = 0 \tag{3}$$

其法线方向为结点 x_I 指向 x_J 。与结点 x_I 对应的 Voronoi 单胞在平面(或直线) L 的结点 x_I 所在的一侧,即结点 x_I 对应的 Voronoi 单胞满足

$$(x_J - x_I) \left(x - \frac{x_I + x_J}{2} \right) + (y_J - y_I) \left(y - \frac{y_I + y_J}{2} \right) + (z_J - z_I) \left(z - \frac{z_I + z_J}{2} \right) \leq 0 \tag{4}$$

假设结点 $x(x_I, y_I, z_I)$ 为插值点 $x_p(x_p, y_p, z_p)$ 的 1 个自然邻点,与结点 $x(x_I, y_I, z_I)$ 对应的自然邻点共有 m 个,分别为 $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_m, y_m, z_m)$,则与结点 x_I 对应的二阶 Voronoi 单胞可写成

$$\begin{cases} (x_I - x_p) \left(x - \frac{x_I + x_p}{2} \right) + (y_I - y_p) \left(y - \frac{y_I + y_p}{2} \right) + (z_I - z_p) \left(z - \frac{z_I + z_p}{2} \right) \leq 0 \\ (x_I - x_1) \left(x - \frac{x_I + x_1}{2} \right) + (y_I - y_1) \left(y - \frac{y_I + y_1}{2} \right) + (z_I - z_1) \left(z - \frac{z_I + z_1}{2} \right) \leq 0 \\ \dots \\ (x_I - x_m) \left(x - \frac{x_I + x_m}{2} \right) + (y_I - y_m) \left(y - \frac{y_I + y_m}{2} \right) + (z_I - z_m) \left(z - \frac{z_I + z_m}{2} \right) \leq 0 \end{cases} \tag{5}$$

令

$$\begin{aligned} a_{01} &= x_I - x_p & a_{02} &= y_I - y_p & a_{03} &= z_I - z_p & b_0 &= \frac{x_I^2 - x_p^2 + y_I^2 - y_p^2 + z_I^2 - z_p^2}{2} \\ a_{i1} &= x_i - x_I & a_{i2} &= y_i - y_I & a_{i3} &= z_i - z_I & b_i &= \frac{x_i^2 - x_I^2 + y_i^2 - y_I^2 + z_i^2 - z_I^2}{2} \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

则式(5)可写为

$$\begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{6}$$

式(6)描述了二阶 Voronoi 单胞的控制域,若能得到二阶 Voronoi 单胞的顶点,则可通过 Delaunay 三角网将控制域划分成若干个小域进行分析。因此若要得到二阶 Voronoi 单胞的勒贝格测度,首先需要得到二阶 Voronoi 单胞的顶点。二阶 Voronoi 单胞的顶点是边界的交点,即式(6)取等号时所得的满足式(6)的点。对于 n 维空间问题,通过联立式(6)中 n 个方程,建立 1 个新的方程组

$$Ax = b \tag{7}$$

若 $|A| \neq 0$,则式(7)必有解

$$x = A^{-1}b \tag{8}$$

若 $x = A^{-1}b$ 满足式(6),则为二阶 Voronoi 单胞的 1 个顶点。

2 Delaunay 三角网

Delaunay 三角网的概念是建立在 Voronoi 单胞基础之上的。将具有公共边界的 Voronoi 单胞所对应的结点连接所得到的三角形,称作 Delaunay 三角形,将 R^n 空间上任意 n 个互异的点通过 Delaunay 三角形划分,可形成 Delaunay 三角网。

- 文献[10]证明了 Delaunay 三角网具有如下性质。
- a. 唯一性:不论从区域何处开始构建,最终都得到一致的结果。
 - b. 最优性:任意 2 个相邻三角形形成的凸四边形的对角线如果可以互换,那么 2 个三角形 6 个内角中最小的角度不会变大。

c. 最规则 :如果将三角网中每个三角形的最小角进行升序排列 ,则 Delaunay 三角网的排列得到的数值最大。

d. 具有凸多边形的外壳 :三角网最外层的边界形成 1 个凸多边形的外壳。
以上这些性质保证了 Delaunay 三角网所划分的区域不具有重叠部分 ,且能覆盖结点所占的凸区域。

目前关于 Delaunay 三角网划分的方法很多^[11-12] ,如 Lawson 算法、Bowyer-Watson 算法等。此外 ,一些商业软件具有成熟的 Delaunay 三角网划分的功能 ,如 MATLAB 软件中 ,可通过 Delaunay 命令进行相关工作。

在三维问题中 ,通过 Delaunay 三角网划分所得的基本体为四面体 ,四面体的体积可通过简单的几何方法得到 ,如已知某四面体的 4 个顶点分别为 (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) (x_4, y_4, z_4) ,则该四面体的体积为

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right| \tag{9}$$

3 算 例

已知三维空间 8 结点 $(0,0,0)$ $(1,0,0)$ $(1,0,1)$ $(0,0,1)$ $(0,1,0)$ $(1,1,0)$ $(1,1,1)$ $(0,1,1)$,插值点 $x_p(0.7236, 0.1382, 0.1382)$,则结点 6 为插值点的自然邻点。结点 6 的自然邻点有 3 个 ,分别为 2,5,7。结点 6 的二阶 Voronoi 单胞为

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.2764 & 0.8618 & -0.1382 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Ax \leq b$
$$b = \begin{pmatrix} 0.7191 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

(10)

通过式(10)中任取 3 个方程并取等号进行联立方程 ,代入上式进行判断是否符合要求 ,可得结点 6 的二阶 Voronoi 单胞的顶点为 $(0.5, 0.5, -1.0854)$ $(1.2927, 0.5, 0.5)$ $(0.5, 0.7542, 0.5)$ $(0.5, 0.5, 0.5)$ 共 4 个结点 ,通过 Delaunay 三角网 ,可划分成 1 个四面体 ,通过式(8)可知其体积为 0.0533。

4 结 语

在已知 Voronoi 单胞顶点的前提下 ,利用 Delaunay 三角网将 Voronoi 单胞划分成若干四面体 ,通过求解四面体的体积得到 Voronoi 单胞的体积。该方法具有原理简单、可行性强、理解性好等优点。

此外 ,该方法不仅可以应用于三维 Voronoi 单胞的体积计算 ,对于任意 1 个已知边界顶点的凸多面体均可应用该方法进行体积的计算。

参考文献 :

[1] BRAUN J ,SAMBRIDGE M. A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grid[J]. Nature , 1995 ,376 :655-660.

[2] SUKUMAR N ,MORAN B ,BELYTSCHKO T. The natural element method in solid mechanics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering ,1998 ,43(5) :839-887.

[3] SIBSON R. A brief description of natural neighbour interpolation[G]//BARNETT V. Interpreting Multivariate Data. New York : Wiley , 1981 :21-36.

[4] BELIKOV V V ,SEMENOV A Y. Non-Sibsonian interpolation on arbitrary system of points in Euclidean space and adaptive isolines generation[J]. Applied Numerical Mathematics ,2000 ,33(4) :371-387.

[5] LASSERRE J B. An analytical expression and an algorithm for the volume of a convex polyhedron in R^n [J]. Journal of Optimization Theory and Applications ,1983 ,39(3) :363-377.

[6] LASSERRE J B. A laplace transform algorithm for the volume of a convex polytope[J]. Journal of the ACM ,2001 ,48(6) :1126-1140.

[7] 王建华 ,张英新 ,高绍武. 三维弹塑性自然单元法算法实现[J]. 计算力学学报 ,2006 ,23(5) :594-598.(WANG Jianhua ,ZHANG Yingxin ,GAO Shaowu. The computational methods of natural element method in three dimensional elasto-plastic analysis[J]. Chinese

Journal of Computational Mechanics 2006 23(5):594-598. (in Chinese))

[8] 江涛,章青. 基于 Lasserre 算法的自然单元法形函数计算[J]. 力学与实践 2008 30(4):1-5. (JIANG Tao ,ZHANG Qing. The shape functions in the natural element method based on Lasserre 's algorithm[J]. Mechanics in Engineering ,2008 ,30(4):1-5. (in Chinese))

[9] 杨永清,冯钧,王志坚. 基于 Voronoi 图的复杂对象空间方位关系的推理计算[J].河海大学学报 :自然科学版 2008 36(3):414-417. (YANG Yongqing ,FENG Jun ,WANG Zhijian. Reasoning and calculation of spatial direction relationship between complex objects based on Voronoi diagan[J]. Journal of Hohai University :Natural Sciences 2008 36(3):414-417. (in Chinese))

[10] SEIDEL R. The upper bound theorem for polytopes :an easy proof of its asymptotic versior[J]. Computational Geometry ,1995 2(2):115-116.

[11] 王建华,徐强勋,张锐. 任意形状三维物体的 Delaunay 网格生成算法[J]. 岩石力学与工程学报 ,2003 22(5):717-722. (WANG Jianhua ,XU Qiangxun ,ZHANG Rui. Delaunay algorithm and related procedure to generate the tetrahedron mesh for an object with arbitrary boundar[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering 2003 22(5):717-722. (in Chinese))

[12] WATSON D F. Computing the *n*-dimensional delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes[J]. The Computer Journal ,1981 24(2):167-172.

· 简讯 ·

水资源高效利用与工程安全国家工程中心 参与举办“ 海洋疏浚泥综合利用技术推广会 ”

为推进 2011 年国家海洋局公益性行业科研专项“ 疏浚泥规模化利用成套技术研究 ”的顺利进行,进一步推广淤泥处理技术,2012 年 6 月 13 日,河海大学水资源高效利用与工程安全国家工程中心联合国家海洋局南海海洋工程勘察与环境研究院在广州举办了“ 海洋疏浚泥综合利用技术推广会 ”。来自海洋主管部门、广州南沙开发区土地开发中心和规划局、广州港务局、惠州港务局、广州港集团、惠州港集团等港航管理单位,中国交通建设股份有限公司天津航道局、中国交通建设股份有限公司广州航道局和中交四航院、中国交通建设股份有限公司二航院等港航设计及施工管理部门的专家等共 48 人参加了会议。国家工程中心副主任、水环境方向首席科学家朱伟教授和淤泥事业部副总经理刘青松出席了会议。

会上,南海海洋工程勘察与环境研究院介绍了疏浚淤泥综合利用项目进展情况及工作设想。朱伟教授作了题为“ 河湖清淤中泥的处理技术及问题 ”的专题报告,淤泥事业部副总经理刘青松作了“ 堆场淤泥表层处理新技术——淤泥原位固化处理技术 ”报告。此外,与会专家及企业代表就当前海洋疏浚综合利用技术面临的挑战和机遇交流了意见和看法,同时针对性地提出了疏浚工程、围填海工程与地方可持续发展有机结合的建议。大家一致认为,目前项目组取得的疏浚泥综合利用技术成果丰硕且实用,特别是疏浚堆场表层原位固化技术经过工程实践,已被证实具备产业化推广潜质,疏浚泥综合利用将成为未来统筹解决区域疏浚泥产生及城市发展用地的首选途径。

(本刊编辑部供稿)