

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2012.05.016

# 弹性地基上框架结构内力计算方法

汪基伟, 提桂娟, 冷 飞

( 河海大学土木与交通学院, 江苏 南京 210098 )

**摘要** : 将框架结构的地基梁单元细分, 由弹性力学中的地基沉陷公式求得与细分后梁单元结点相对应的地基柔度矩阵, 对柔度矩阵求逆得到地基刚度矩阵, 与框架结构刚度矩阵叠加形成总体刚度矩阵, 设置虚梁考虑边荷载, 通过求解确定地基集中反力为受拉的结点, 消除这些结点对地基刚度的贡献, 进而考虑地基与地基梁的脱开问题, 由梯形分布荷载作用下的梁单元固端剪力系数矩阵, 建立由结点处地基集中反力求地基分布反力的关系式, 形成了完善的半解析弹性地基上框架结构内力与地基反力求解方法, 算例表明该方法有很好的精度。同时通过算例发现, 不同地基模型对结构的总沉陷影响较大, 但对结构内力、地基反力和沉陷差影响较小。

**关键词** : 平面框架; 弹性地基梁; 地基模型; 平面杆系有限元

**中图分类号** : TU348; TU433 **文献标志码** : A **文章编号** : 1000-1980( 2012 )05-0563-05

## Calculation method of internal force of frame structures on elastic foundations

WANG Jiwei, TI Guijuan, LENG Fei

( College of Civil and Transportation Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China )

**Abstract** : The foundation beam elements of a frame structure were subdivided as required. The foundation stiffness matrix was obtained by inverting the flexibility matrix of the subdivided foundation beam of the frame structure. The flexibility matrix was established from foundation settlement in elastic mechanics. The total stiffness matrix was formed by the stiffness matrix of the foundation beam and frame structure. Side loads were exerted by the virtual beam. The tensile separation of the beam from the foundation was considered by the transformation of the concentrated reaction force to contribution of tensile nodes to foundation stiffness. The relationship between the distributed subgrade reaction force and the concentrated reaction force was developed by a coefficient matrix of shear force at a fixed end of the beam under trapezoidal distributed loading. Finally, a complete semi-analytical method for frame structures on elastic foundations was established. An example shows that the method has high accuracy, and various foundation models have significant influence on the total settlement of the structure and insignificant influence on the structural internal force, foundation reaction force, and subsidence difference.

**Key words** : planar frame; elastic foundation beam; foundation model; planar bar-system finite element method

水利工程中许多结构可以简化为作用在地基上的平面框架结构, 如尾水管<sup>[1]</sup>、水闸<sup>[2]</sup>、蜗壳<sup>[3]</sup>等, 其内力常采用地基梁法和有限单元法求解。地基梁法将上部结构和地基梁作为 2 个独立的结构, 将地基梁作为上部结构的固定支座, 采用结构力学求出上部结构的内力及支座反力, 然后将支座反力施加给地基梁, 查表求出地基梁内力。这种方法简单方便, 可以手算, 但忽略了上部结构和地基之间的相互作用, 不能反映整个结构的变形与内力。采用有限单元法计算时, 地基划分为块体单元<sup>[4]</sup>, 为了避免梁单元与块体单元结点自由度不一致引起的误差, 将框架也划分为块体单元, 为模拟框架与地基可能的脱开, 在框架与地基之间设置界面单元, 求出单元应力后通过对应力积分得到框架结构的内力。这种方法网格划分和内力求解过程比较繁琐, 地基网格划分的范围也影响计算精度。为解决这些问题, 文献[5]提出了半解析法, 该法的要点是将上部结

构、地基梁和地基视为2个子结构,用有限单元法求解上部子结构的单位位移,用弹性力学公式求解下部子结构即多层地基的沉陷系数,通过2个子结构交界面上的变形协调条件和上部子结构的静力平衡条件求出结构与地基相互作用的基底反力,然后再用叠加原理求出上部结构和基础的位移和内力。此法考虑了上部结构和地基之间的相互作用,地基不需要划分网格,框架可采用梁单元,避免有限单元法由应力求解内力的步骤以及地基网格划分范围对计算精度的影响,但计算模型较为繁琐。文献[6]提出了直接刚度法,该方法的出发点与文献[5]相同,即仍采用弹性力学公式求地基沉陷系数,其区别是将地基沉陷系数矩阵转化成刚度矩阵,直接与地基梁刚度叠加形成总体刚度矩阵。该方法模型简单,计算方便,但存在以下问题:(a)未解决地基边荷载问题;(b)得到的地基梁剪力值在应该连续处不连续,不符合实际情况;(c)未对地基反力分布情况进行分析;(d)只考虑了半平面地基模型;(e)没有讨论地基梁与地基脱开的情况。笔者针对上述问题开展研究,以形成一种简单且计算精度高的弹性地基框架内力计算方法。

1 计算模型与平衡方程的建立

设弹性地基上有一受直接荷载( $M, F, q$ )和边荷载( $q_1, q_2$ )作用的框架结构,如图1所示。假定当地基反力受压时地基与地基梁接触面的竖向变形连续,受拉时地基与地基梁脱开,地基与地基梁接触面只能传递法向反力。

仍采用直接刚度法求解。图1所示框架结构可划分为9个梁单元,其中单元①和②为虚梁,用来考虑边荷载作用,计算时只考虑边荷载引起地基沉陷所产生的地基刚度贡献,不考虑梁的刚度贡献。单元③和④为地基梁,单元⑤~⑨为框架梁。为考虑地基刚度的作用,将单元①~④细分为 $n$ 个子单元,单元长度为 $c$ ,细分后子单元长度较小,计算较精确。图2所示框架结构细分后,子单元总数为 $n+5$ ,结点总数为 $n+4$ ,原作用于单元①~④的荷载相应地转移到子单元与结点上。在地基梁一侧设置刚性水平约束,以消除结构的刚体位移,如图2所示。

平衡方程如下:

$$(K_G + K_S)a = R \tag{1}$$

式中: $K_G$ ——框架结构刚度矩阵(含地基梁刚度); $K_S$ ——地基刚度矩阵; $a$ ——整体结点位移列阵; $R$ ——整体结点荷载列阵。

2 刚度矩阵求解

框架结构的梁单元刚度矩阵可参见文献[7],当构件的剪切变形影响不能忽略时,应采用考虑剪切变形的梁单元刚度矩阵<sup>[8]</sup>。对除虚梁之外的所有框架结构梁单元循环叠加,可得到框架结构的刚度矩阵 $K_G$ 。

地基刚度矩阵 $K_S$ 由其柔度矩阵求逆得到<sup>[9]</sup>,由于矩阵求逆时矩阵主元不能有零元,且地基梁的走向不一定和整体坐标一致,因此首先需根据地基梁的走向建立地基梁的局部坐标系,对地基梁结点重新连续编号,并建立新结点编号与老结点编号的转换矩阵。将与地基梁单元对应的地基划分为如图3所示的单元( $b$ 为地基梁宽度,地基单元中心点与梁单元结点在同一位置上<sup>[10]</sup>),并将地基对梁的分布反力简化为梁结点处的集中力。

设单位力 $F$ 作用在 $j$ 单元中点,见图3,利用沉陷公式求得单元 $i$ 中点的沉陷 $f_{ij}$ ,即柔度系数;当 $i=j$ 时,将单位力均匀分布在单元 $j$ 的长度 $c$ 上,计算单元 $i$ 中点产生的沉陷。下面给出3种地基模型柔度系数的公式。

a. 弹性半空间地基模型的柔度系数<sup>[11]</sup>。表达式如下:

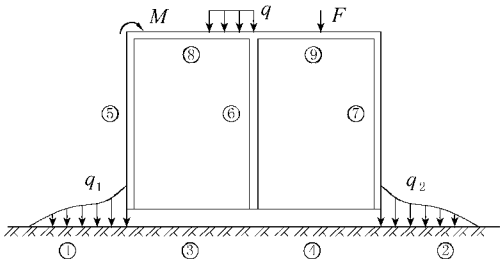


图1 框架结构

Fig. 1 Frame structure

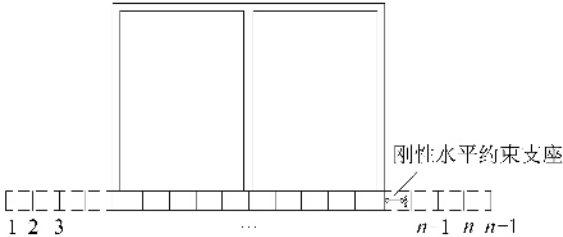


图2 计算模型

Fig. 2 Calculation Model

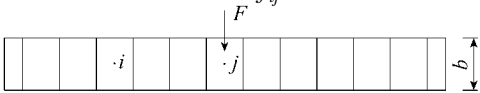


图3 地基单元划分示意图

Fig. 3 Foundation element division

$$f_{ij} = \begin{cases} \frac{1-\nu^2}{\pi E_0 c} F_{ij} & i = j \\ \frac{1-\nu^2}{\pi E_0 r} & i \neq j \end{cases} \tag{2}$$

其中  $F_{ij} = 2 \frac{c}{b} \left\{ \ln \frac{b}{c} + \frac{b}{c} \ln \left[ \frac{c}{b} + \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 1} \right] + \ln \left[ 1 + \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 1} \right] \right\}$   
式中： $E_0, \nu$ ——地基弹性模量和泊松比； $r$ ——距单位力作用点的距离； $b$ ——地基梁宽度。

b. 弹性半平面地基模型的柔度系数<sup>[12]</sup>。本文模型的柔度系数求解需取定一个基点，因此得到的是相对柔度系数。表达式如下：

$$f_{ij} = \begin{cases} \frac{2}{\pi E_0} F_{ij} & i = j \\ \frac{2}{\pi E_0} \ln \frac{s}{r} & i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

其中  $F_{ij} = \ln \frac{s}{c} + 1 + \ln 2 - \frac{r}{c} \ln \left( \frac{2 \frac{r}{c} + 1}{2 \frac{r}{c} - 1} \right) - \ln \left( 4 \frac{r^2}{c^2} - 1 \right)$

式中各符号含义同式(2)。

c. 多层地基模型的柔度系数<sup>[12]</sup>。表达式如下：

$$f_{ij} = \sum_{t=1}^n \frac{\sigma_{ijt}}{E_{sit}} H_{it} \tag{4}$$

式中： $n$ ——地基压缩层内土层的分层数； $H_{it}$ —— $i$  单元中点下第  $t$  土层的厚度； $E_{sit}$ —— $i$  单元中点下第  $t$  土层的压缩模量； $\sigma_{ijt}$ —— $j$  单元中点处的单位集中附加压力作用下对  $i$  单元中点下第  $t$  土层所产生的平均附加应力，按问题的性质，分为空间和平面 2 种情况。

利用上述公式可求得地基梁局部坐标下的地基柔度矩阵：

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

将式(5)求逆得到地基梁局部坐标下的地基刚度矩阵  $K'_S$ ：

$$K'_S = f^{-1} = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

结构总刚度矩阵建立在整体坐标中，每个结点有 3 个自由度，而地基刚度矩阵是在局部坐标下求得，每个结点只有法向自由度，所以应将  $K'_S$  经转换矩阵转换到整体坐标。得到整体坐标下的地基刚度  $K_S$  后，再根据地基梁新结点编号与老结点编号的转换矩阵将  $K_S$  叠加到总体刚度矩阵中。

### 3 地基反力和地基梁内力求解

由式(1)求得位移后，由地基梁的竖直位移与地基刚度矩阵相乘就可得到作用在地基梁结点上的地基集中反力，见式(7)。

$$F = K'_S a' \tag{7}$$

式中： $F$ ——地基梁结点上地基集中反力列阵； $K'_S$ ——局部坐标下地基刚度矩阵； $a'$ ——局部坐标下地基梁结点竖直位移列阵。

当某点的地基集中反力受拉，就意味着此点地基梁与地基脱开，此时应忽略相应结点处地基对地基梁的刚度贡献，重新计算，直到全部地基集中反力均为压力。

式(7)得到的是作用在地基梁结点上的地基集中反力。为求地基分布反力，假设作用在每个地基梁单元上的地基反力为梯形线性分布，如图 4 所示。

由作用梯形荷载的两端固定单跨的杆端剪力公式得到地基梁单元固端剪力系数矩阵,可建立由结点处地基集中反力求地基分布反力的关系式:

$$\frac{c}{20} \begin{bmatrix} 7 & 3 & & & \\ 3 & 14 & 3 & & \\ & & 3 & 14 & 3 \\ & & & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ X_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \\ F_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

式中: $X_i$ ——地基分布反力在地基梁结点处的反力; $F_i$ ——式(7)求得的地基梁结点上的地基集中反力。  
地基反力是地基作用在地基梁上的荷载,文献[3]在计算地基梁内力时未考虑地基反力产生的固端力,因此得到的地基梁剪力有误,在应该连续处不连续。笔者在计算地基梁内力时将分布地基反力求出的固端剪力并入一般荷载的固端力,得到了正确的地基梁剪力。

由式(1)得到位移后,用式(9)所示的梁单元平衡方程即可求得考虑地基影响的所有梁的内力。

$$\bar{F}_e = \bar{k} \bar{a}_e - \bar{F}_{eG} \quad (9)$$

式中: $\bar{F}_e$ ——所有梁单元内力; $\bar{k}$ ——梁单元刚度矩阵; $\bar{a}_e$ ——单元结点位移列阵; $\bar{F}_{eG}$ ——单元固端力列阵。

4 算 例

根据上述方法编制相应的程序。图5为某有限深地基上的涵闸,所受荷载与边界情况如图中所示。边柱截面尺寸为0.7m×1.0m,中柱截面尺寸为0.8m×1.0m,横梁和地基梁截面尺寸为0.6m×1.0m,上部结构弹性模量 $E = 2.6 \times 10^4$  MPa,泊松比 $\nu = 0.167$ ,密度 $\rho = 2\,400$  kg/m<sup>3</sup>。地基弹性模量 $E = 300$  MPa,泊松比 $\nu = 0.35$ ,地基深度为11.1m。对该结构同时采用本文方法和商业软件计算,以校验本文方法精度。按本文方法计算时,框架模型取梁柱中心线尺寸,采用平面分层地基。按商业软件计算时,采用PLANE42单元,按平面应变计算,取地基宽度为55m,地基深度为11.1m,上部结构的网格控制尺寸为0.05m,求得应力后转化成内力。图6给出了2种方法的计算结果,其中括号内为商业软件计算结果。需要指出的是,采用商业软件计算时给出的是柱边缘处地基梁的内力,为比较2种方法的计算结果,图6标注本文方法计算结果时,除标注结点处内力外还标注了柱边缘处地基梁的内力。从计算结果发现,2种方法相同位置上内力的最大差值在8%以内,表明本文方法精度较好,能满足工程要求。

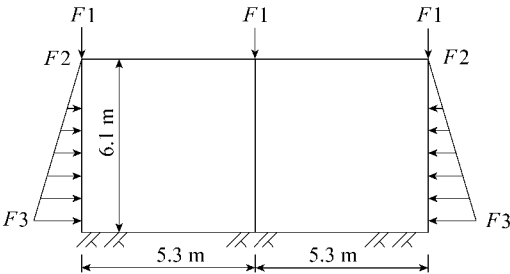


图5 涵闸计算简图  
Fig. 5 Calculation diagram of sluice gate

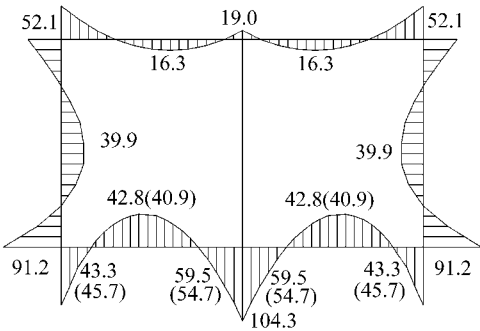


图6 弯矩计算结果(单位:kN·m)  
Fig. 6 Calculated results of bending moment (units : kN·m)

为分析半平面、半空间和多层地基模型对结构内力的影响,对上述算例进一步分析。图7比较了半平面地基模型和分层平面地基模型的结果,括号内为半平面结果,括号外为分层平面结果,图8比较了半空间地基模型和分层空间地基模型的计算结果,括号内为半空间结果,括号外为分层空间结果。由图7可见,不同平面地基条件对总沉陷影响较大,但对结构内力、地基反力和沉陷差影响不大。对不同空间地基,由图8也可得出相同的结论。

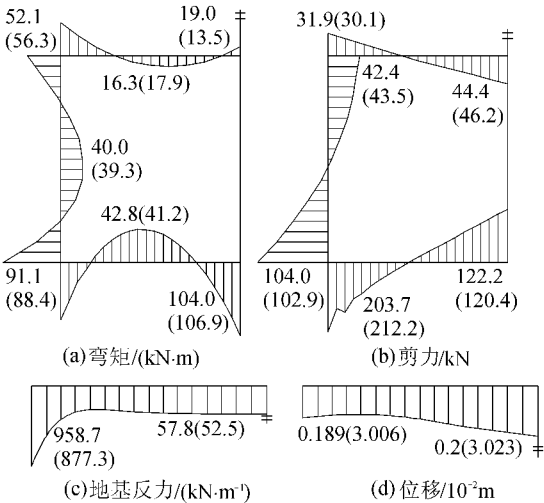


图 7 2 种平面地基模型的计算结果比较

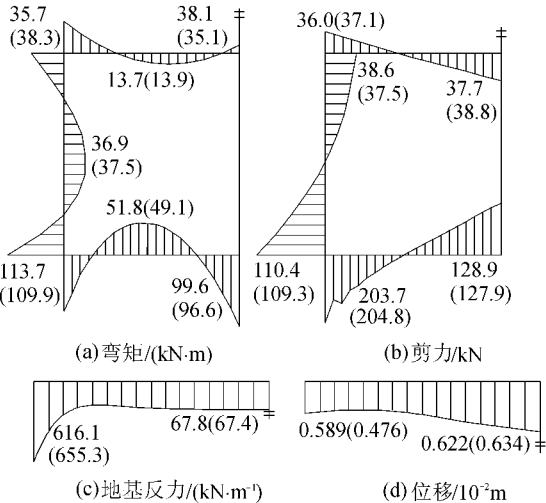


图 8 2 种空间地基模型的计算结果比较

Fig. 7 Comparison of results of two planar foundation models Fig. 8 Comparison of results of two space foundation models

5 结 论

- a. 给出了完善的半解析弹性地基上框架结构内力与地基反力求解方法。其特点如下 (a)由弹性力学中的地基沉陷公式求得地基柔度矩阵后,求逆得到地基刚度矩阵,与框架结构刚度矩阵叠加形成总体刚度矩阵,可直接求得结构位移,方便简捷;(b)可考虑边荷载作用、地基与地基梁的脱开,可求地基反力分布,功能完善。
- b. 算例表明,不同地基模型对结构的总沉陷影响较大,但对结构内力、地基反力和沉陷差影响较小。

参考文献:

[ 1 ] 徐关泉. 水电站厂房尾水管肘管段底板分析方法探讨[ J ]. 河海大学学报: 自然科学版, 1990, 18( 2 ): 122-125. ( XU Guanquan. Analysis methods of the draft tube elbow pipe baseplate in hydropower house[ J ]. Journal of Hohai University: Nature Sciences, 1990, 18( 2 ): 122-125. ( in Chinese ))

[ 2 ] 彭宣茂, 傅作新. 大型船闸锚固底板的力学分析[ J ]. 河海大学学报: 自然科学版, 1993, 21( 5 ): 77-84. ( PENG Xuanmao, FU Zuoxin. Mechanic analysis of anchor foundation plates of large-scale lock[ J ]. Journal of Hohai University: Nature Sciences, 1993, 21( 5 ): 77-84. ( in Chinese ))

[ 3 ] 杨菊生, 揽生瑞. 水电站混凝土蜗壳有限元计算研究[ J ]. 西安理工大学学报, 1985( 4 ): 61-72. ( YANG Jusheng, LAN Shengrui. Studies of finite element method for reinforced concrete worm shell at hydropower station[ J ]. Journal of Xi'an University of Technology, 1985( 4 ): 61-72. ( in Chinese ))

[ 4 ] 张晓玲. 弹性地基梁的有限元分析[ J ]. 山西建筑, 2008( 9 ): 137-138. ( ZHANG Xiaoling. Finite element analysis of flexible foundation beam[ J ]. Shanxi Architecture, 2008( 9 ): 137-138. ( in Chinese ))

[ 5 ] 彭宣茂, 张子明, 宁勇. 多层地基上框架结构计算的半解析法[ J ]. 河海大学学报: 自然科学版, 1993, 21( 3 ): 46-52. ( PENG Xuanmao, ZHANG Ziming, NING Yong. Semi-analytical method for computing framer on layered foundation[ J ]. Journal of Hohai University: Nature Sciences, 1993, 21( 3 ): 46-52. ( in Chinese ))

[ 6 ] 刘泉. 直接刚度法求解平面半无限弹性地基梁[ J ]. 水运工程, 2002( 7 ): 20-22. ( LIU Quan. Calculating plane semi-infinite elastic foundation beams by direct rigidity method[ J ]. Waterway Engineering, 2002( 7 ): 20-22. ( in Chinese ))

[ 7 ] 龙驭球, 包世华, 匡启文, 等. 结构力学教程[ M ]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 77-82.

[ 8 ] 沈锦英. 结构力学的电子计算机计算原理及程序设计[ M ]. 北京: 冶金工业出版社, 1988.

[ 9 ] CHEUNG Y K, ZIENKIEWICZ O C. Plates and tanks on elastic foundation[ J ]. Int J Solids Structures, 1965, 1: 451-461.

[ 10 ] 张季荣, 姚祖恩, 楼文娟. 有限单元法计算分层地基上的弹性地基梁[ J ]. 岩土工程学报, 1986, 8( 3 ): 16-25. ( ZHANG Jirong, YAO Zuen, LOU Wenjuan. Computation of a beam on multilayer foundation using finite element method[ J ]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1986, 8( 3 ): 16-25. ( in Chinese ))

[ 11 ] 龙驭球. 弹性地基梁的计算[ M ]. 北京: 高等教育出版社, 1981.

[ 12 ] 袁聚云. 基础工程设计原理[ M ]. 上海: 同济大学出版社, 2007.