

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2012.05.019

光滑有限单元法及其应用

张旭明,孙建国

(河海大学力学与材料学院,江苏 南京 210098)

摘要:对光滑有限单元法进行综述,介绍光滑有限单元法、边界光滑有限单元法、节点光滑有限单元法的基本思想、基本算法、方法特点以及在一些领域的应用。归纳得出:光滑有限单元法将应变光滑化措施引入有限单元法,可以降低网格划分要求,适应不规则网格;光滑有限单元法的算法与有限单元法基本相同,在有限单元法程序基础上进行少量修改即可实现;光滑有限单元法计算结果比有限单元法更精确。

关键词:光滑有限单元法;应变光滑化;光滑子元;光滑子域

中图分类号: D242.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1980(2012)05-0582-04

Smoothed finite element method and its application

ZHANG Xuming, SUN Jianguo

(College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: This paper presents a review of the smoothed finite element method. The basic concepts, calculation processes, characteristics, and applications of the smoothed finite element method (SFEM), the edge-based smoothed finite element method (ES-FEM), and the node-based smoothed finite element method (NS-FEM) are introduced. The SFEM is formulated by incorporating a cell-wise strain smoothing operation into the conventional finite element method (FEM), in which the elements are allowed to be of arbitrary shapes. Compared with the FEM, the SFEM achieves more accurate results without increasing computational cost. The implementation of the SFEM is straightforward without much change to the standard FEM settings.

Key words: smoothed finite element method; strain smoothing; smoothing cell; smoothing domain

有限单元法是求解数学物理问题的重要数值方法,由于其具有通用性和有效性,因此在技术科学和工程分析中获得了最广泛的应用。至今,围绕有限单元法的研究仍是应用数学和计算力学的热点课题。在裂纹、孔洞、杂质等不连续问题以及裂纹扩展问题中,为降低网格划分要求,提出了广义有限单元法及扩展有限单元法。对于大变形问题,为避免不断进行网格重划分,提出了无网格法等。可见,降低有限单元法对网格划分的要求,减少动态问题中的网格重划分是有限单元法发展的要求。

光滑有限单元法是近年来由刘桂荣等^[1]首先提出的方法,是在有限单元法的基础上引入应变光滑化措施^[2],改进有限单元法结构刚度计算的一种方法。Liu 等^[3]建立了光滑有限单元法的理论基础,并提出节点光滑有限单元法(NS-FEM)^[4]和边界光滑有限单元法(ES-FEM)^[5]。光滑有限单元法降低了对网格划分的要求,求解精度比有限单元法更高,结构刚度可随光滑子元数量增加而单调增大,并趋向有限单元法的刚度。

本文对光滑有限单元法进行综述,主要介绍光滑有限单元法、边界光滑有限单元法和节点光滑有限单元法的基本思想、基本算法、方法特点等,并和有限单元法进行比较。

1 光滑有限单元法

光滑有限单元法是将有限单元法的单元进一步划分成光滑子元,如图 1 所示,图中 S_C 为光滑子元的数量。在光滑子元内引入应变光滑化措施,单元的刚度矩阵由光滑子元的刚度矩阵累加集成。在单元内进一步划分光滑子元不同于有限单元法的网格加密,有限单元法的网格加密增加了节点数从而提高了计算精度。而光滑有限单元法划分光滑子元的目的是将单元刚度矩阵的计算由 1 个单元区域内积分改为光滑子元的区域积分之和。光滑有限单元法并不增加节点数,即没有改变有限单元法的近似解空间,所以光滑有限单元法的解是对有限单元法解的一种改进。

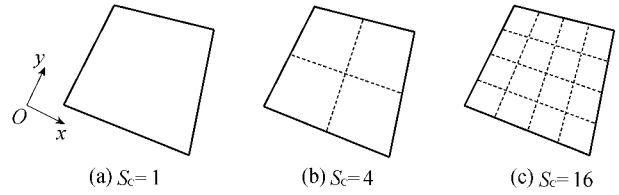


图 1 光滑有限单元法中的光滑子元

Fig. 1 Smoothing cells in SFEM

文献 [3] 证明了这种改进的可行性 (a) 一维线性单元和二维线性三角形单元光滑有限单元法结果与有限单元法相同 (b) 二维四边形单元,当 $S_C = 1$ 时,光滑有限单元法与有限单元法中采用缩减积分具有类似特性 (c) 当 $S_C \rightarrow \infty$ 时,光滑有限单元法的结果趋向有限单元法采用全积分的结果 (d) S_C 有限时,变分不一致,但能量一致 (e) 结构刚度随光滑子元数单调增加。分析表明,在单调的变化过程中,通过选取合适的光滑子元数可得到比相应有限单元法更精确的结果。

光滑有限单元法与有限单元法的区别在于刚度的计算,将光滑因子 $\Phi_C(x)$ 引入应变 $\epsilon_h(x) = \nabla_s u_h(x)$ 的计算(下标 h 代表其为光滑化后的物理量,下标 C 代表该量值是光滑子元上的量值)。文献 [3] 采用常数光滑函数:

$$\Phi_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{A_C} & x \in \Omega_C \\ 0 & x \notin \Omega_C \end{cases} \tag{1}$$

$$\int_{\Omega_C} \Phi_C(x) d\Omega = 1 \tag{2}$$

则光滑子元的应变为

$$\tilde{\epsilon}_{hC} = \int_{\Omega_C} \epsilon_h(x) \Phi_C(x) d\Omega = \int_{\Omega_C} \nabla_s u_h(x) \frac{1}{A_C} d\Omega \tag{3}$$

式中: Ω_C ——光滑子域; A_C ——光滑子元的面积。

将位移插值公式 $u_h(x) = \sum_{I=1}^{N_p} N_I(x) d_I$ 代入式 (3) 得

$$\tilde{\epsilon}_{hC} = \sum_{I=1}^{N_p} \tilde{B}_{CI} d_I \tag{4}$$

其中

$$\tilde{B}_{CI} = \int_{\Omega_C} \frac{1}{A_C} \nabla_s N_I(x) d\Omega = \frac{1}{A_C} \int_{\Omega_C} B_I(x) d\Omega \tag{5}$$

式中: $N_I(x)$ ——第 I 个结点的形函数矩阵; N_p ——节点的个数; $\tilde{B}_{CI}$ ——光滑化后第 I 个节点的应变矩阵; d_I ——第 I 个节点的位移; $B_I(x)$ ——光滑化前第 I 个结点的应变矩阵。

光滑有限单元法的单元刚度矩阵为

$$K_{IJ} = \sum_{C=1}^{S_C} \int_{\Omega_C} \tilde{B}_{CI}^T D \tilde{B}_{CJ} d\Omega = \sum_{C=1}^{S_C} \tilde{B}_{CI}^T D \tilde{B}_{CJ} A_C \tag{6}$$

式中: S_C ——光滑子元的数量; D ——弹性常数矩阵。

应用散度定理将应变的计算改为

$$\tilde{\epsilon}_{hC} = \frac{1}{A_C} \int_{\Omega_C} \nabla_s u_h(x) d\Omega = \frac{1}{A_C} \int_{\Gamma_C} n_C(x) u_h(x) d\Gamma \tag{7}$$

则应变矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_{CI} = \frac{1}{A_C} \int_{\Gamma_C} \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{n}_C(\boldsymbol{x}) d\Gamma$$

(8)

式中 $\boldsymbol{n}_C$ 为光滑子域边界外法线方向矩阵。

文献[3]给出了端部受集中力的悬臂梁在多种计算方案(包括矩形单元和不规则单元)下的计算结果,文中的网格密度范围为 $16 \times 4 \sim 128 \times 32$,光滑子元数目范围为 $1 \sim 14$ 。光滑有限单元法的计算结果及误差分析反映了其结果随光滑子元数单调变化的规律。

2 光滑有限单元法的发展

光滑有限单元法是将有限单元法的单元划分成光滑子元并引入应变光滑化措施的一种数值模拟方法。

2.1 边界光滑有限单元法

边界光滑有限单元法是将有限单元法的单元划分成子元,不同于光滑有限单元法,其光滑子域是由单元边界相邻的子元组成,如图2所示,图中 Ω_m (节点 $AB1$ 所围区域), Ω_k (节点 $C3D2$ 所围区域)为光滑子域示例。应变光滑措施针对光滑子域施加,整体刚度矩阵由子域的刚度矩阵集成。边界光滑有限单元法偏好三角形单元,且其计算结果优于有限单元法的三角形单元,甚至超过四边形单元的计算结果^[5]。边界光滑有限单元法同光滑有限单元法一样,亦可在一般有限单元法程序的基础上进行少量修改即可实现。相比一般有限单元法,可得出更高精度的刚度矩阵,且计算所得的刚度矩阵介于有限单元法和节点光滑有限单元法之间。

边界光滑有限单元法的光滑子域的刚度矩阵为

$$(\tilde{\boldsymbol{K}}_{IJ})_k = \int_{\Omega_k} \tilde{\boldsymbol{B}}^T \boldsymbol{D} \tilde{\boldsymbol{B}}_J d\Omega = \tilde{\boldsymbol{B}}^T \boldsymbol{D} \tilde{\boldsymbol{B}}_J A_k$$

(9)

整体刚度矩阵由光滑子域的刚度矩阵集成:

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_{IJ} = \sum_{k=1}^{N_s} (\tilde{\boldsymbol{K}}_{IJ})_k$$

(10)

式中 N_s 为边界总数。

2.2 节点光滑有限单元法

节点光滑有限单元法中同样是将有限单元法的单元划分成子元,不同于光滑有限单元法的是,节点光滑有限单元法沿节点边界相邻的子元组成光滑子域,如图3所示,图中 Ω_k (节点 $a1b2c3d4e5$ 所围区域)为光滑子域示例。应变光滑措施针对光滑子域施加,整体的刚度矩阵由子域的刚度矩阵集成。节点光滑有限单元法可以提供位移解的上限,结合有限单元法的位移解下限,可以给出解的范围,且其对体积自锁不敏感^[4]。节点光滑有限单元法的光滑化与边界有限单元法相似,在得到光滑子域的刚度矩阵 $(\tilde{\boldsymbol{K}}_{IJ})_k$ 后,整体刚度矩阵由光滑子域的刚度矩阵集成:

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_{IJ} = \sum_{k=1}^{N_n} (\tilde{\boldsymbol{K}}_{IJ})_k$$

(11)

式中 N_n 为节点总数。

3 结 语

光滑有限单元法自提出以来已在一些领域得到应用。Liu等^[5]利用边界光滑有限单元法、节点光滑有限单元法解决不可压缩材料的体积自锁问题,并得出较好的解;Nguyen-Xuan等^[6]将边界光滑有限单元法应用

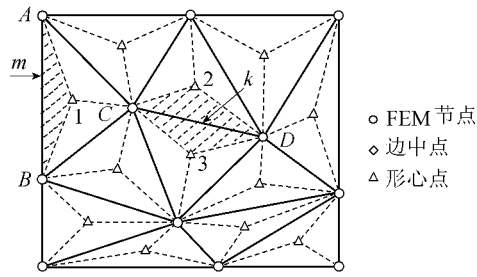


图2 边界光滑有限单元法的光滑子域

Fig. 2 Smoothing domains in ES-FEM

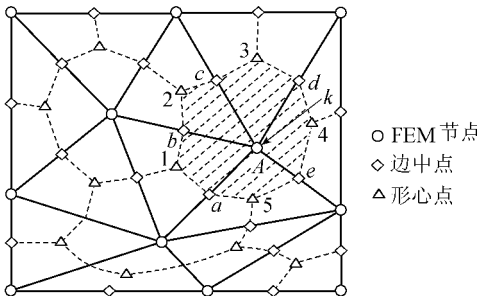


图3 节点光滑有限单元法的光滑子域

Fig. 3 Smoothing domains in NS-FEM

于压电材料的分析, Cui 等^[7]利用节点光滑有限单元法、边界光滑有限单元法分析金属成型, He 等^[8]将边界光滑有限单元法用于分析声学问题等。在 JGJ 3—2002《高层建筑混凝土结构技术规程》中, 明确要求重要工程必须使用 2 种以上计算模型进行分析计算, 应用节点光滑有限单元法的位移解上限, 结合有限单元法的位移解下限, 可给出工程问题的解的范围, 在实际工程问题中很重要。

光滑有限单元法是近年来提出的新方法, 应用此方法时要注意方法的适用范围。文献^[10]指出光滑有限单元法的不足, 例如无变换单元的形函数的存在依赖于坐标的选择、多边形单元的形函数不唯一、面积积分变换为线积分等问题。

光滑有限单元法至今仍在发展, 新方法仍在不断提出。任意多边形光滑有限单元法^[11]由光滑有限单元法发展而来, 并用于任意多边形单元。三维边界光滑有限单元法^[12]由边界光滑有限单元法发展而来, 用于分析三维问题等。总之, 光滑有限单元法具有对网格划分要求低、适用任意多边形单元、相对于有限单元法可得较高精度、可给出解的上限和下限等特点, 具有很好的应用前景。

参考文献:

- [1] LIU G R, DAI K Y, NGUYEN-THOI T. A smoothed finite element method for mechanics problems[J]. Computational Mechanics, 2007, 39 (6) : 859-877.
- [2] CHEN J S, WU C T, YOON S, et al. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh free method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50 (2) : 435-466.
- [3] LIU G R, NGUYEN T T, DAI K Y, et al. Theoretical aspects of the smoothed finite element method (SFEM) [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007, 71 : 902-930.
- [4] LIU G R, NGUYEN-THOI T, NGUYEN-XUAN H, et al. A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems[J]. Computers and Structures, 2009, 87 (1/2) : 14-26.
- [5] LIU G R, NGUYEN-THOI T, LAM K Y. An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for static, free and forced vibration analyses of solid[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 320 (4/5) : 1100-1130.
- [6] NGUYEN-XUAN H, LIU G R, NGUYEN-THOI T. An edge-based smoothed finite element method for analysis of two-dimensional piezoelectric structure[J]. Smart Mater Struct, 2009, 18 (6) : 1-12.
- [7] CUI Xiangyang, LI Guangyao, ZHENG Gang. NS-FEM/ES-FEM for contact problems in metal forming analysis[J]. Int J Mater Form, 2010, 3 (Sup1) : 887-890.
- [8] HE Z C, LIU G R, ZHONG Z H. A coupled edge-/face-based smoothed finite method for structure-acoustic problems[J]. Applied Acoustics, 2010, 71 (10) : 955-964.
- [9] HE Z C, LIU G R, ZHONG Z H. A coupled ES-FEM/BEM method for fluid-structure interaction problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, 35 (1) : 140-147.
- [10] ZHANG H H, LIU S J, LI L X. On the smoothed finite element method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 76 : 1285-1295.
- [11] DAI K Y, LIU G R, NGUYEN-THOI T. An n -sided polygonal smoothed finite element method (nSFEM) for solid mechanics[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2007, 43 (11/12) : 847-860.
- [12] NGUYEN-THOI T, LIU G R, LAM K Y. A face-based smoothed finite element method (FS-FEM) for 3D linear and geometrically non-linear solid mechanics problems using 4-node tetrahedral elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 78 : 324-353.