

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2013.02.010

基于分数阶微积分的岩土材料变形研究

段晓梦,殷德顺,李彦青,张 伟

(河海大学力学与材料学院,江苏 南京 210098)

摘要:为更好地描述岩土材料的变形特性,利用分数阶微积分建立分数阶横向-纵向应变关系及分数阶体积应变模型,并推导等应变率加载时相应的变形公式。该分数阶应变模型具有参数少、形式简单的特点。通过常规(等应变率加载情况下)三轴压缩试验验证,发现该模型既能够较好地描述岩土材料的横向-纵向应变关系,也能够反映多种岩土材料的剪缩剪胀现象。

关键词:分数阶微积分;横向-纵向应变关系;体积应变;剪缩剪胀;岩土材料变形

中图分类号:O34;TU311 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-1980(2013)02-0145-05

Study on deformation of geomaterials based on fractional order calculus

DUAN Xiaomeng, YIN Deshun, LI Yanqing, ZHANG Wei

(College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: To better describe the deformation of geomaterials, a fractional longitudinal-transverse strain model is presented in this paper using fractional order calculus. The corresponding equations under a loading with constant longitudinal strain rate are derived for volume strain. The new model enjoys the advantages of having fewer parameters and a simple form. A series of triaxial test data under a constant longitudinal strain rate was employed to validate the proposed fractional strain model. It was found that the fractional longitudinal-transverse strain model can describe not only the longitudinal-transverse strain relationship, but also the phenomenon of negative and positive dilatancy in many types of geomaterials.

Key words: fractional order calculus; longitudinal-transverse strain relationship; volume strain; negative and positive dilatancy; deformation of geomaterials

岩土材料的变形特性十分复杂,剪缩剪胀性是其最大特点之一。现有的剪缩剪胀研究多以常规三轴压缩试验为基础,针对不同种类的岩土材料提出了相应的本构关系或变形理论^[1-2]。然而这些研究得到的理论模型多以某一种特定岩土材料的试验结果为基础,适用性有所局限。模型参数大多形式复杂,实际应用不够便捷。另外,现有的岩土材料变形研究更多地关注体积变形,很少有人探讨横向-纵向应变关系的问题。笔者认为材料的横向-纵向应变关系的复杂性是导致变形特性复杂的主要原因。

材料的横向-纵向应变关系常用泊松比来表示。Tschoegl 等^[3]将黏弹性材料具有时间依赖性的泊松比记为 $\nu(t)$,从而在某些情况下可以用 $\varepsilon' = -\nu(t)\varepsilon$ 描述黏弹性材料的横向-纵向应变关系。但对于不同的加载方式, $\nu(t)$ 具有不同的表达式,且形式较为复杂,应用时不够简洁。另外,泊松比的本质是横向-纵向应变关系,泊松比研究的根本目的是为了能够便捷地通过纵向应变求出横向应变。而黏弹性材料泊松比较理想弹性材料的泊松比复杂得多,所以笔者希望通过直接探讨横向-纵向应变关系来研究岩土材料的变形特性。

分数阶微积分作为数学理论的一个重要分支,已被成功用于许多复杂现象的研究中,诸如黏弹性力学^[4]、电磁学^[5]、动力学^[6]等领域。殷德顺等^[7]还将分数阶微积分应用于岩土材料流变模型的研究中。利

收稿日期:2012-10-18

基金项目:江苏省自然科学基金(BK2012810)

作者简介:段晓梦(1986—),男,陕西咸阳人,硕士研究生,主要从事黏弹性材料的变形研究。E-mail: xmd2132@126.com

用分数阶微积分建立的物理模型能够较好地描述具有记忆及时间依赖性的物理现象,且具有参数少、形式简单的优点。因此,笔者尝试用分数阶微积分建立一种既能较好地描述岩土材料剪缩剪胀现象,又形式简单、参数少,还能适用于多种岩土材料的变形模型。分数阶微积分的定义有很多种,笔者基于 Riemann-Liouville 定义的分数阶微积分^[8]建立岩土材料分数阶横向-纵向应变关系和分数阶体积应变模型,希望探索一条研究岩土材料变形的新思路。

1 分数阶岩土应变模型

1.1 分数阶横向-纵向应变关系

对于理想弹性材料,应力与应变之间遵循虎克定律,即 $\sigma = E\varepsilon$ 。对于非理想弹性材料,Smit 等^[9]基于分数阶微积分,提出了分数阶应力应变本构模型:

$$\sigma(t) = E\theta^\alpha \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha} \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

(1)

式中: E, θ ——材料常数; α ——分数阶阶数。

模型(1)利用了分数阶微积分的优点,具有参数少、形式简单的特点,能够反映材料力学性质的时间依赖性。

在弹性力学中,对应于虎克定律有横向-纵向应变关系式 $\varepsilon' = -\nu\varepsilon$,其中 ε' 表示横向应变, ε 表示纵向应变。在 Wong 等^[10]的研究中,可以发现软骨在应力松弛时荷载随时间的变化曲线与体积随时间的变化曲线很相似。因此,可以设想是否也存在着一种与分数阶应力应变关系相对应的分数阶横向-纵向应变关系,于是笔者大胆地提出如下公式(即分数阶横向-纵向应变关系):

$$\varepsilon'(t) = -\phi\eta^\beta \frac{d^\beta \varepsilon(t)}{dt^\beta}$$

(2)

式中: ϕ, η ——材料常数; β ——应变关系分数阶阶数,能够反映黏弹性材料在不同条件下的变形特性及变形能力,与材料性质及加载条件等有关。

当 $\beta=0$ 时,式(2)能够退化成 $\varepsilon' = -\nu\varepsilon$,此时式(2)中的 ϕ 就成为材料的泊松比 ν 。如果 β 是常量,则 $\phi\eta^\beta$ 也是常量,可记为 λ 。在等应变率加载时,纵向应变表示为 $\varepsilon = \nu_0 t$ (ν_0 为常数)。通过式(2)可以得到

$$\varepsilon' = -\lambda \frac{v_0^\beta}{\Gamma(2-\beta)} \varepsilon^{1-\beta}$$

(3)

式(3)就是等应变率加载时的分数阶横向-纵向应变关系。根据式(3)可以得到 β 取不同值时的 $|\varepsilon'| \sim |\varepsilon|$ 理论曲线(图1)。由于式(2)中对时间求导,致使 λ 的量纲与泊松比 ν 的不相同,所以 λ 并不是材料的泊松比,类似于式(1)中的参数 $E\theta^\alpha$ 描绘了具有流变性的非理想弹性材料的性质,与材料的微观结构特性有关,其明确的物理意义有待进一步研究。

1.2 分数阶体积应变

在一定条件下,体积应变可以表示为 $\varepsilon_v = \varepsilon + 2\varepsilon'$ 。将式(3)代入该式能够得到等应变率加载时的分数阶体积应变公式:

$$\varepsilon_v = \varepsilon - 2\lambda \frac{v_0^\beta}{\Gamma(2-\beta)} \varepsilon^{1-\beta}$$

(4)

根据式(4),当 $-1 < \beta < 0$ 且 $\varepsilon < 0$,即材料受压时, β 取不同值可得如图2所示的理论曲线。这些曲线分别描述岩土材料在常规三轴压缩试验中的剪缩与剪胀现象。容易发现,分数阶微积分在变形建模中能够发挥其巨大优势:新模型参数少、形式简单,能够充分反映材料变形的时间依赖性,且参数易于确定,适用性广泛,并能合理描绘岩土材料的剪缩剪胀性。

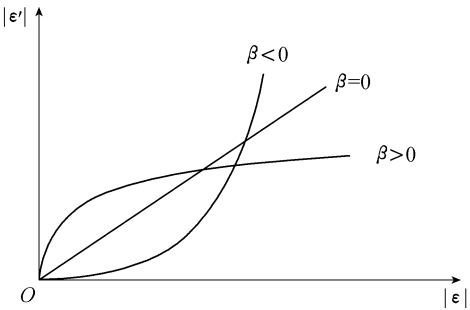


图1 等应变率加载 $|\varepsilon'| \sim |\varepsilon|$ 理论曲线
Fig. 1 $|\varepsilon'| \sim |\varepsilon|$ theoretical curves at a constant longitudinal strain rate

2 模型验证

由于岩土不能受拉,而高分子材料是典型的黏弹性材料,所以首先利用高分子材料来验证拉伸加载时分数阶变形模型的正确性,然后再通过3种具有代表性的岩土材料的变形数据来验证分数阶变形模型在常规三轴压缩情况下的正确性。根据式(3)可知横向应变与纵向应变之间呈幂函数关系,所以,只要提供相应的对数关系便能获得相关参数。笔者建立的模型在应力松弛和等应变率加载情况下能够推导出解析应变关系公式,不需要数值算法。如果遇到复杂的加载情况,可以通过数值算法求解。有关分数阶微积分的数值算法问题可以参阅文献[8]。

2.1 高分子材料等应变率拉伸变形

Addiego 等^[11]曾研究过高密度聚乙烯在等应变率单轴拉伸时的体积变形。通过式(3)和式(4),可以得到 $|\varepsilon'| \sim |\varepsilon|$ 和 $\varepsilon_v \sim \varepsilon$ 的拟合曲线(图3)。他们在研究中发现高分子材料在等应变率拉伸初期,试件的体积几乎保持不变,甚至会发生微量收缩。通过图3可以知道,分数阶变形模型不仅能够很好地模拟高分子材料的变形行为,还能够描述试件在加载初期体积发生微量收缩的现象。

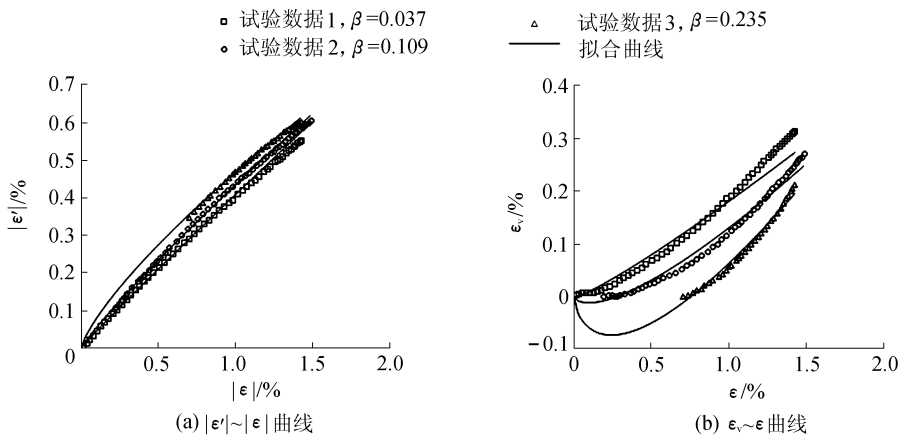


图3 高密度聚乙烯等应变率拉伸应变曲线

Fig. 3 Strain curves at a constant longitudinal strain rate for high-density polyethylene

2.2 岩土材料常规三轴压缩变形

常规三轴压缩试验是测量可变形固体力学性质的一种有效方法,其加载过程可分为2个阶段:第1阶段,将恒定应力加到试样上,直至试样应变不再变化;第2阶段,在第1阶段加载基础上施加一个逐渐增大的应力 $\sigma_1-\sigma_3$,或一个变化的纵向应变 ε_1 。对于第2阶段,如果纵向应变 ε_1 只与 $\sigma_1-\sigma_3$ 有关,则可以等同于单轴压缩试验。因此,针对单轴加载的分数阶变形模型可用于常规三轴试验。

李治^[12]和刘萌成等^[13]分别对黏土和堆石料做过常规三轴压缩试验研究,得到一系列试验数据。利用式(3)和式(4),可以得到 $|\varepsilon'| \sim |\varepsilon|$ 和 $\varepsilon_v \sim \varepsilon$ 的拟合曲线,分别如图4和图5所示。由图4、图5可知,笔者建立的分数阶横向-纵向应变关系与岩土材料的实际变形情况较吻合。

研究发现:等应变率拉伸时 β 为正,压缩时 β 为负。众所周知,材料拉伸和压缩时其内部力学行为是有区别的,而 β 的正负号变化正好能够表征这种差别。随着围压 σ_3 的增加, β 值不断减小(绝对值增大),表明 β 能反映常规三轴压缩试验中围压对岩土材料剪缩剪胀性的影响。从多孔介质角度考察岩土材料,其变形行为是孔隙水和土颗粒运动的外在反映,即 β 可以反映孔隙水和土颗粒的运动行为。综上所述, β 实际上是岩土材料在不同加载条件下其内部复杂运动机理的宏观度量。当然, β 如何与材料内部行为相对应还需要结合相关研究进行深入探讨。另外,笔者发现即使有些 $|\varepsilon'| \sim |\varepsilon|$ 曲线相当接近直线(β 值接近零),但却不能用直线来拟合,否则在拟合体积应变时将出现误差。

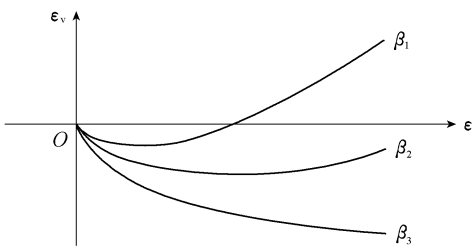


图2 等应变率加载时的 $\varepsilon_v \sim \varepsilon$ 曲线示意图

Fig. 2 $\varepsilon_v \sim \varepsilon$ theoretical curves at a constant longitudinal strain rate

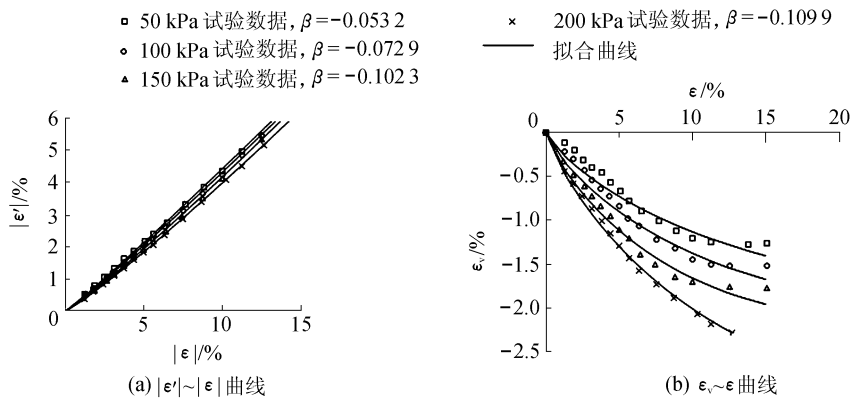


图 4 黏土常规三轴压缩试验应变曲线

Fig. 4 Strain curves for clay in triaxial compression tests

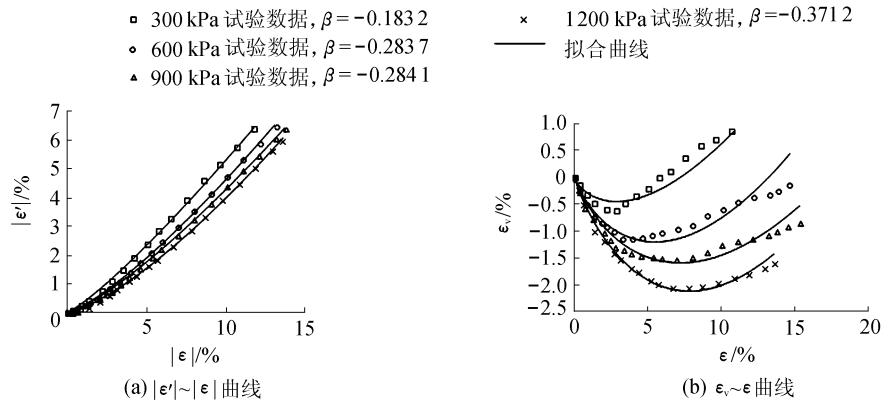


图 5 堆石料常规三轴压缩试验应变曲线

Fig. 5 Strain curves for rockfills in triaxial compression tests

3 结 论

- a. 分数阶变形模型具有分数阶模型的参数少、形式简单的优点。
- b. 分数阶横向-纵向应变关系符合岩土材料的实际变形情况,能够较好地拟合试验数据。
- c. 岩土材料的剪缩剪胀现象能够被分数阶体积应变模型合理地描述。 β 能反映常规三轴压缩试验中围压对于岩土材料剪缩剪胀性的影响。
- d. 虽然一些岩土材料的横向-纵向应变关系近似线性关系,但若用线性关系来描述,会在描述其体积变形时产生误差。
- e. 模型如何扩展为三维,以及将该理论模型与计算机数值算法相结合,是需要继续关注的方向。

参考文献:

[1] 赵星光,蔡明,蔡美峰. 岩石剪胀角模型与验证[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(5): 970-981. (ZHAO Xingguang, CAI Ming, CAI Meifeng. A rock dilation angle model and its verification[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(5): 970-981. (in Chinese))

[2] 迟明杰. 砂土的剪胀性及本构模型的研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2008.

[3] TSCHOEGL N W, KNAUSS W G, EMRI I. Poisson's ratio in linear viscoelasticity: a critical review [J]. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2002, 6(1): 3-51.

[4] LEWANDOWSKI R, CHORAŻYCEWSKI B. Identification of the parameters of the Kelvin-Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers [J]. Computers & Structures, 2010, 88(1/2): 1-17.

[5] JESUS I S, MACHADO J A T. Implementation of fractional-order electromagnetic potential through a genetic algorithm [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(5): 1838-1843.

[6] SAHA R S, CHAUDHURI K S, BERA R K. Analytical approximate solution of nonlinear dynamic system containing fractional

derivative by modified decomposition method [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 182(1): 544-552.

[7] 殷德顺,任俊娟,和成亮,等. 一种新的岩土流变模型元件 [J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(9): 1899-1903. (YIN Deshun, REN Junjuan, HE Chengliang, et al. A new rheological model element for geomaterials[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(9): 1899-1903. (in Chinese))

[8] 陈文,孙洪广,李西成. 力学与工程问题的分数阶导数建模 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.

[9] SMIT W, de VRIES H. Rheological models containing fractional derivatives [J]. Rheologica Acta, 1970, 9(4): 525-534.

[10] WONG M, PONTICIELLO M, KOVANEN V, et al. Volumetric changes of articular cartilage during stress relaxation in unconfined compression [J]. Journal of biomechanics, 2000, 33(9): 1049-1054.

[11] ADDIEGO F, DAHOUN A, G'SELL C, et al. Characterization of volume strain at large deformation under uniaxial tension in high-density polyethylene [J]. Polymer, 2006, 47(12): 4387-4399.

[12] 李治. 模拟基坑应力路径的真三轴平面应变试验研究 [D]. 南京: 河海大学, 2006.

[13] 刘萌成,高玉峰,刘汉龙. 堆石料剪胀特性大型三轴试验研究 [J]. 岩土工程学报, 2008, 30(2): 205-211. (LIU Mengcheng, GAO Yufeng, LIU Hanlong. Study on shear dilatancy behaviors of rockfills in large-scale triaxial tests[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(2): 205-211. (in Chinese))

· 简讯 ·

第四届全国水工抗震防灾学术交流会将在西安召开

在汶川特大地震五周年之际,由中国水力发电工程学会抗震防灾专业委员会主办,西安理工大学、中国水电顾问集团西北勘测设计研究院、陕西省水利水电勘测设计研究院、陕西省水力发电工程学会承办的第四届全国水工抗震防灾学术会议将于 2013 年 9 月 21—23 日在西安召开。

我国是一个多地震国家,目前全国已建或在建的高于百米的大坝有 100 多座,一批在建和拟建的 200 ~ 300 m 级战略性水电工程,规模巨大,所在地区地震烈度高,抗震防灾将成为工程建设考虑的关键因素。因此会议主题包括:(a) 水工建筑物抗震分析理论;(b) 水工建筑物抗震设计规范修订的关键技术;(c) 地震震后水工建筑物震损调查、震害分析、灾害评估及修复加固;(d) 水工结构现场检测与监测、健康诊断与鉴定;(e) 水库引发地震、地震预测和预警;(f) 水电工程抗震措施、抗震安全评价体系;(g) 水工结构工程振动、爆炸与冲击;(h) 水工建筑物现代抗震设计理念、施工水平。

会议电子文件请浏览网站:www.meeting.edu.cn(中国学术会议在线)。

(本刊编辑部供稿)