

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2015.03.009

下限极限分析的子迭代路径跟踪内点算法

钱向东¹, 吴有奇¹, 林荔珊²

(1. 河海大学力学与材料学院, 江苏 南京 210098; 2. 上海市水务规划设计研究院, 中国 上海 200232)

摘要: 采用路径跟踪内点法求解有限元下限极限分析所对应的非线性规划问题。在非线性方程组的 Newton 算法中引入子迭代过程, 能够直接采用位移型有限元的数据存储格式和求解工具, 并且大量计算可以在单元一级完成。改进的算法可直接利用现有的位移型有限元程序, 实现过程简单。算例表明, 该算法的效率和精度均可以得到保证。

关键词: 下限极限分析法; 有限元; 非线性规划; 路径跟踪内点法

中图分类号: TU311 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1980(2015)03-0244-05

Subiterative interior point path-following algorithm for lower bound limit analysis

QIAN Xiangdong¹, WU Youqi¹, LIN Lishan²

(1. College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, China;
2. Shanghai Water Planning and Design Research Institute, Shanghai 200232, China)

Abstract: The interior point path-following method was applied to lower bound finite element limit analysis of the nonlinear programming problem. By applying the subiterative process in the Newton algorithm to solving nonlinear equations, the data storage format and solver of the displacement-based finite element method can be used directly, and large amounts of calculation can be performed element by element. The improved algorithm can be simply implemented with the existing displacement-based finite element program. An example shows that the subiteration algorithm can obtain high efficiency and precision.

Key words: algorithm for lower bound limit analysis; finite element; nonlinear programming; interior point path-following algorithm

下限极限分析法的目标是寻求满足静力容许条件的最大外荷载, 即极限荷载的最大下限^[1]。当采用有限单元法进行求解时, 下限极限分析问题最终转化为以荷载因子为目标函数、应力向量为变量, 满足平衡条件和屈服条件的约束最优化问题。其数学表达式为

$$\begin{cases} \max & \beta \\ \text{s. t.} & \mathbf{E}\boldsymbol{\sigma} = \beta\mathbf{R}_v + \mathbf{R}_c \\ & f_i(\boldsymbol{\sigma}) \leqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N_F) \end{cases} \quad (1)$$

式中: β ——可变荷载的比例因子; $\mathbf{E}$ ——系统的平衡矩阵; $\boldsymbol{\sigma}$ ——系统的应力向量; $\mathbf{R}_v$ ——系统的可变荷载向量; $\mathbf{R}_c$ ——系统的不变荷载向量; $f_i(\boldsymbol{\sigma})$ ——应力屈服函数; N_F ——系统的应力表征点数。

当屈服函数是应力的非线性函数时, 最优化问题(1)为非线性约束最优化问题, 早期的解法都是将约束条件线性化^[2-3], 继而转化为线性最优化问题。对于大型有限元问题, 这种线性化可能导致约束数量的急剧增加。近年来, 有关学者为了避免因线性化而导致约束数量急剧增加的问题, 都在致力于寻求直接求解非线性

性最优化问题。Herskovits 等^[4-5]、Zouain 等^[6]提出一种适用于上、下限分析的二步可行方向迭代算法,由满足全部等式约束条件的初始点出发,采用 Newton 迭代和方向偏转技术,搜索可行方向确定满足不等式约束的前进方向和步长。Lyamin 等^[7]进一步发展此方法,以可行点作为初始点,提出了新的方向偏转方法和分步 Newton 算法,并应用于处理二、三维土力学极限分析问题。Krabbenhoft 等^[8]采用松弛变量和罚函数技术处理不等式约束,提出了一种适合于所有单元模型和屈服条件的路径跟踪内点法^[8-12],该方法不需要调整迭代方向,通过调整惩罚因子保证迭代点接近约束边界而不超越边界。这些方法最终都归结为非线性方程组的分步 Newton 算法,每步迭代中必须求解一个代数方程组,其系数矩阵的阶数和稀疏性均不同于刚度矩阵,解法的效率有待进一步研究,且很难利用现有的位移型有限元软件。

本文将 Krabbenhoft 等^[8]的算法加以改造,在分步 Newton 算法中引入子迭代过程,使其能够直接采用位移型有限元的数据存储和求解格式。

1 路径跟踪内点法

引入松弛变量 $s \geq 0$ 和对数惩罚函数后,下限极限分析的约束最优化问题可以等价地表示为^[8]

$$\begin{cases} \max F = \beta + \mu \sum_{j=1}^{N_F} \lg s_j \\ \text{s. t. } E\sigma - \beta R_v - R_c = 0 \\ f(\sigma) + s = 0 \end{cases} \tag{2}$$

式中: μ ——惩罚因子,采用迭代法计算时,其数值在迭代过程中逐渐减少。

由 Kuhn-Tucker 条件可导出问题(2)的最优化条件,相应的 Lagrange 函数为

$$L(\sigma, \beta, s, \lambda, v) = \beta + \mu \sum_{j=1}^{N_F} \lg s_j - \lambda^T (f(\sigma) + s) - v^T (\beta R_v + R_c - E\sigma) \tag{3}$$

式中: λ, v ——Lagrange 乘子向量和对偶变量。

一阶 Kuhn-Tucker 极值条件要求 Lagrange 函数的梯度向量等于 0,即

$$\nabla L(\sigma, \beta, S, \lambda, v) = \left(\frac{\partial L}{\partial \sigma}, \frac{\partial L}{\partial \beta}, \frac{\partial L}{\partial S}, \frac{\partial L}{\partial \lambda}, \frac{\partial L}{\partial v} \right)^T = (0, 0, 0, 0, 0)^T \tag{4}$$

将式(3)代入式(4)后得

$$r = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \nabla f(\sigma) \lambda - E^T v \\ R_v^T v - 1 \\ S \lambda - \mu e \\ f(\sigma) + s \\ E\sigma - \beta R_v - R_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

其中 $S = \text{diag}(s_j)$

式中: e ——单位向量。

采用 Newton 法求解非线性方程组(5),迭代格式为

$$T^k \Delta p^k = -r^k \quad p^{k+1} = p^k + \Delta p^k \tag{6}$$

其中 $T = \nabla r = \begin{bmatrix} H & 0 & 0 & \nabla f(\sigma) & -E^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_v^T \\ 0 & 0 & \Lambda & S & 0 \\ \nabla f(\sigma)^T & 0 & I & 0 & 0 \\ E & -R_v & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$p = (\sigma, \beta, s, \lambda, v)^T \quad \Delta p = (\Delta \sigma, \Delta \beta, \Delta s, \Delta \lambda, \Delta v)^T$$

$\Lambda = \text{diag}(\lambda_j)$

式中: I ——单位矩阵; H ——Hessian 矩阵,其表达式为

$$\boldsymbol{H} = \sum_{j=1}^{N_F} \lambda_j \nabla^2 f_j(\boldsymbol{\sigma}) \qquad H_{ij} = \sum_{k=1}^{N_F} \lambda_k \frac{\partial^2 f_k(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} \tag{7}$$

对于某些屈服准则,可能会出现 $\boldsymbol{H}$ 非正定的情况,此时可引入一微小的正的摄动参数 ε ,把 $\boldsymbol{H}$ 改写为

$$\boldsymbol{H} = \sum_{j=1}^{N_F} \lambda_j \nabla^2 f_j(\boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon \boldsymbol{I} \qquad H_{ij} = \sum_{k=1}^{N_F} \lambda_k \frac{\partial^2 f_k(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} + \delta_{ij} \varepsilon \tag{8}$$

一般取 $\varepsilon = 10^{-5} \max \lambda_j$,其中 $\delta_{ij} = 1 (i=j), \delta_{ij} = 0 (i \neq j)$ 。

以上就是下限极限问题(1)的路径跟踪内点法。

2 分步 Newton 算法

考虑到矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的高度稀疏性,为了减少方程组的规模,以达到提高计算效率的目的,展开式(6)中第一式,略去迭代次数标记 k ,可以得到以下 5 个方程组:

$$\boldsymbol{H} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \nabla f(\boldsymbol{\sigma}) \Delta \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{E}^T \Delta \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{r}_1 \tag{9}$$

$$\boldsymbol{R}_v^T \Delta \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{r}_2 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{A} \Delta \boldsymbol{s} + \boldsymbol{S} \Delta \boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{r}_3 \tag{11}$$

$$\nabla f(\boldsymbol{\sigma})^T \Delta \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{s} = -\boldsymbol{r}_4 \tag{12}$$

$$\boldsymbol{E} \Delta \boldsymbol{\sigma} - \Delta \beta \boldsymbol{R}_v = -\boldsymbol{r}_5 \tag{13}$$

由式(12)和式(11)有

$$\Delta \boldsymbol{s} = -(\boldsymbol{r}_4 + \nabla f(\boldsymbol{\sigma})^T \Delta \boldsymbol{\sigma}) \tag{14}$$

$$\Delta \boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{A} \Delta \boldsymbol{s}) = -\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{A} \boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{A} \nabla f(\boldsymbol{\sigma})^T \Delta \boldsymbol{\sigma}) \tag{15}$$

将式(14)、式(15)代入式(9)有

$$\boldsymbol{W} \Delta \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{E}^T \Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{q} \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W} &= \boldsymbol{H} + \nabla f(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{S}^{-1} \boldsymbol{A} \nabla f(\boldsymbol{\sigma})^T \\ \boldsymbol{q} &= -\boldsymbol{r}_1 + \nabla f(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{A} \boldsymbol{r}_4) \end{aligned}$$

将式(16)代入式(13)有

$$\boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{E}^T \Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{q} - \Delta \beta \boldsymbol{R}_v = -\boldsymbol{r}_5 \tag{17}$$

将式(17)代入式(10)可得求解 $\Delta \beta$ 的方程:

$$\boldsymbol{R}_v^T (\boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{E}^T)^{-1} \boldsymbol{R}_v \Delta \beta = \boldsymbol{R}_v^T (\boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{E}^T)^{-1} (\boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}_5) - \boldsymbol{r}_2 \tag{18}$$

从而可以分步解出

$$\Delta \beta = \frac{\boldsymbol{R}_v^T (\boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{E}^T)^{-1} (\boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}_5) - \boldsymbol{r}_2}{\boldsymbol{R}_v^T (\boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{E}^T)^{-1} \boldsymbol{R}_v} \tag{19}$$

$$\Delta \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{E}^T)^{-1} (\Delta \beta \boldsymbol{R}_v - \boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}_5) \tag{20}$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{E}^T \Delta \boldsymbol{v}) \tag{21}$$

$$\Delta \boldsymbol{s} = -(\boldsymbol{r}_4 + \nabla f(\boldsymbol{\sigma})^T \Delta \boldsymbol{\sigma}) \tag{22}$$

$$\Delta \boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{A} \Delta \boldsymbol{s}) \tag{23}$$

分析比较表明,这种分步 Newton 算法一般比用式(6)直接求解约快 10 倍^[7-8]。

3 子迭代算法

在分步 Newton 算法中,每一迭代步都必须对矩阵 $\boldsymbol{W}$ 、 $\boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{E}^T$ 求逆。 $\boldsymbol{W}$ 是块对角矩阵,求逆过程计算量不大;但 $\boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{E}^T$ 的稀疏性、有效的存储格式和求逆算法目前还没有专门的研究。本文提出一种避免求逆矩阵 $(\boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{E}^T)^{-1}$ 且能够直接利用有限元刚度矩阵的子迭代算法。

令

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{E}^T = \boldsymbol{K}_0 - \bar{\boldsymbol{K}} \tag{24}$$

则

$$\bar{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K}_0 - \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_0 - \boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{E}^T \tag{25}$$

若取 $\boldsymbol{K}_0$ 为通常意义下的弹性刚度矩阵,则可以构造一种子迭代格式计算式(19)和(20)。继续令 $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{E} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}_5$,则式(19)为

$$\Delta\beta = \frac{\mathbf{R}_v^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g} - \mathbf{r}_2}{\mathbf{R}_v^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}_v}$$

(26)

再令 $\delta=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}_v$ 、 $\varphi=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{g}$,则有 $\mathbf{K}\delta=\mathbf{R}_v$ 、 $\mathbf{K}\varphi=\mathbf{g}$,将式(24)代入后有:

$$\mathbf{K}_0\delta = \mathbf{R}_v + \bar{\mathbf{K}}\delta$$

(27)

$$\mathbf{K}_0\varphi = \mathbf{g} + \bar{\mathbf{K}}\varphi$$

(28)

采用简单迭代法可以求解方程(27)和(28),取 $\delta^0=0$ 、 $\varphi^0=0$,有

$$\mathbf{K}_0\delta^j = \mathbf{R}_v + \bar{\mathbf{K}}\delta^{j-1}$$

(29)

$$\mathbf{K}_0\varphi^j = \mathbf{g} + \bar{\mathbf{K}}\varphi^{j-1}$$

(30)

解出 δ 和 φ 后,再代入式(26)有

$$\Delta\beta = \frac{\mathbf{R}_v^T \varphi - \mathbf{r}_2}{\mathbf{R}_v^T \delta}$$

(31)

把式(31)代入式(20)后,可以迭代求解 $\Delta\mathbf{v}$,取 $\Delta\mathbf{v}^0=0$:

$$\mathbf{K}_0\Delta\mathbf{v}^j = \Delta\beta\mathbf{R}_v - \mathbf{g} + \bar{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{v}^{j-1}$$

(32)

值得指出的是子迭代算法中需要重复计算型如 $\bar{\mathbf{K}}\mathbf{y}$ 的矩阵乘积运算,可以表示为

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{y} = \mathbf{K}_0\mathbf{y} - \mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}^T\mathbf{y}$$

(33)

$\mathbf{W}^{-1}$ 是一个块对角矩阵,存储量很少,而 $\mathbf{K}_0\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{E}^T\mathbf{y}$ 的计算均可在单元一级完成,因此,不必存储整体的 $\mathbf{E}$ 矩阵。

4 算 例

如图 1 所示,一个正方形板,边长为 $2L$,上下两边均有一长为 $L/2$ 的切口,左右两边受均布荷载 σ 的作用。该模型材料为各向同性的均质材料,服从 Von Mises 屈服条件,平面应变情况下为

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \frac{4}{3}\sigma_0^2$$

(34)

取 $\sigma_0=\sqrt{3}$ MPa、 $L=1$ m 时的极限荷载为 $\sigma_c\approx1.13156$ MPa^[8]。

考虑问题的对称性,取 1/4 建立有限元计算模型,采用 4 结点四边形等参单元模拟。4 等分($N=4$)的网格如图 2 所示。采用 2 等分($N=2$)至 38 等分($N=38$)的 10 种网格进行计算,结果见表 1。

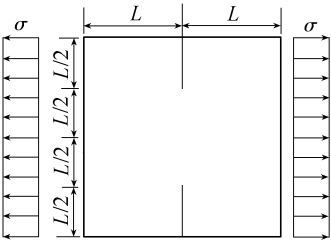


图 1 切口方板
Fig. 1 Slotted square block

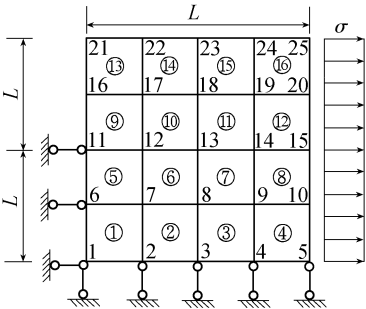


图 2 N=4 时的有限元法网格
Fig. 2 Element discretization for N=4

Newton 算法的控制条件为满足如下关系式时迭代结束:

$$\max f_i(\sigma) < 10^{-5} \quad \|\mathbf{E}\sigma - \beta\mathbf{R}_v - \mathbf{R}_c\| < 10^{-10}$$

(35)

5 结 语

极限分析对应的非线性规划问题是一类典型的约束最优化问题,Krabbenhoft 等提出的路径跟踪内点法适用于各种有限元离散和屈服条件,无需对非线性约束条件进行线性化。本文对该算法加以改造,在 Newton 算法中引入子迭代过程,使其能够直接采用位移型有限元的数据存储格式和求解工具,大量计算可以在单元一级完成。子迭代算法可直接利用现有的位移型有限元程序,易于实现。算例表明,子迭代算法的效率和精度均可以得到保证。

表 1 极限荷载计算结果

Table 1 Calculated results of limit load σ_c for slotted square block

N	单元个数	结点个数	变量个数	σ_c/MPa	误差/%	迭代次数
2	4	9	48	1.025 93	-9.335	2
4	16	25	192	1.050 05	-7.204	3
8	64	81	768	1.075 26	-4.976	4
12	144	169	1 728	1.104 72	-2.372	4
16	256	289	3 072	1.121 87	-0.856	5
20	400	441	4 800	1.129 13	-0.214	5
24	576	625	6 912	1.129 83	-0.153	6
30	900	961	10 800	1.130 63	-0.082	7
34	1 156	1 225	13 872	1.131 29	-0.024	8
38	1 444	1 521	17 328	1.131 42	-0.012	9

参考文献:

[1] 徐秉业,刘信声. 结构塑性极限分析[M]. 北京:中国建筑工业出版社,1985:1-11.

[2] BOTTERO A,NEGRE R,PASTOR J,et al. Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems[J]. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering,1980,22:131-149.

[3] SLOAN S W. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,1988,12:61-77.

[4] HERSKOVITS J. A two-stage feasible directions algorithm for nonlinearly constrained optimization [J]. Mathematical Programming,1986,36:19-38.

[5] HERSKOVITS J. Feasible direction interior-point technique for nonlinear optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1998,99(1):121-146.

[6] ZOUAIN N,HERSKOVITS J,BORGES L A,et al. An iterative algorithm for limit analysis with nonlinear yield functions[J]. International Journal of Solids and Structures,1993, 30(10):1397-1417.

[7] LYAMIN A V,SLOAN S W. Lower bound limit analysis using non-linear programming[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,2002,55:573-611.

[8] KRABBENHOFT K,DAMKIDLE L. A general non-linear optimization algorithm for lower bound limit analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,2003,56:165-184.

[9] PASTOR F,LOUTE E. Solving limit analysis problems;an interior-point method[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering,2005,11:631-642.

[10] SIMON J W,WEICHERT D. Numerical lower bound shakedown analysis of engineering structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,2011,41-44:2828-2839.

[11] LI Huaxiang. A nonlinear programming approach to limit analysis of non-associated plastic flow materials[J]. Mathematics and Mechanics of Solids,2013,18:524-542.

[12] SIMON J W,HÖWERB D,WEICHERTB D. A starting-point strategy for interior-point algorithms for shakedown analysis of engineering structures[J]. Engineering Optimization,2014,5:648-668.