

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2015.05.010

三维土质边坡稳定性分析方法研究现状与展望

高玉峰^{1,2}, 王 迪^{1,2}, 张 飞^{1,2}

(1. 河海大学土木与交通学院, 江苏 南京 210098;
2. 岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098)

摘要: 回顾土质边坡稳定性分析 3 种主要方法(极限平衡法、极限分析法、数值分析法)的国内外研究现状, 总结发现:(a)传统的极限平衡法和极限分析法在 20 世纪得到了快速发展;(b)21 世纪以来随着计算机技术与数值方法的进步, 数值分析法的优势越发显著, 受到大家的认可与推崇;(c)尽管已有的三维分析方法被不断地改进与完善, 但是依旧存在一些问题需要深入研究。在总结国内外研究进展的基础上, 对已有的三维土质边坡分析方法研究存在的困难进行了分析。最后, 针对三维土质边坡稳定性分析方法存在的问题和近些年的发展趋势, 展望了未来的研究方向。

关键词: 土质边坡; 稳定性分析; 三维分析; 极限平衡法; 极限分析法; 数值分析法; 综述

中图分类号: U213.1+3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1980(2015)05-0456-09

Current research and prospects of 3D earth slope stability analysis methods

GAO Yufeng^{1,2}, WANG Di^{1,2}, ZHANG Fei^{1,2}

(1. College of Civil and Transportation Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;
2. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and
Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Three methods currently used in earth slope stability analysis, including the limit equilibrium method, limit analysis method, and numerical analysis method, are reviewed in this paper. Analyses show that (a) the traditional limit equilibrium and limit analysis methods were developed rapidly in the 20th century; (b) with the development of computer techniques and numerical methods in the 21st century, three-dimensional(3D) numerical analysis methods (e.g., the finite element method and finite difference method) have been developed and widely accepted because of their significant advantages; and (c) although these 3D slope stability analysis methods have been improved, there are still some problems. Based on analysis of the existing problems and development trends of the 3D slope stability analysis methods, some ideas are presented for the future development of these analysis methods.

Key words: earth slope; stability analysis; three-dimensional (3D) analysis; limit equilibrium method; limit analysis method; numerical analysis method; review

我国丘陵、岗地分布广泛, 客观上决定了我国存在大量自然土质边坡; 同时, 我国当前正处于经济飞速发展的时期, 兴建了大量的基础设施, 进而产生了大量的工程土质边坡, 如公路路堑边坡、高速公路路基边坡、岸堤、土坝等。这些土质边坡通常由黏土、砂土或者粉土等堆积而成。然而, 这些土质边坡在外荷载(如填筑、地震、降雨、渗流等)作用下极易发生失稳, 轻则中断交通运输, 重则产生滑坡、溃堤等严重灾害, 进而造成巨大损失。

边坡稳定性问题是岩土力学与工程中的基本问题之一, 一直备受关注。众多专家学者提出了各种边坡

收稿日期: 2015-07-02

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(2015CB057901); 水利部公益性行业科研专项(201501035-03)

作者简介: 高玉峰(1966—), 男, 安徽来安人, 教授, 博士, 主要从事岩土与地震工程研究。E-mail: yfgao66@163.com

稳定性分析方法,并被广泛应用于实际工程。边坡稳定性分析最早是由岩土力学中侧向土压力与地基承载力分析发展起来的,将 Coulomb(1776)的挡土墙土压力计算方法和 Rankine(1857)的主动土压力与被动土压力计算方法应用到边坡稳定性分析中,建立了最初的极限平衡法。这种传统方法被不断地发展改进,其中包括:瑞典法^[1]、Bishop 法^[2]、简化 Janbu 法^[3]、Spencer 法^[4]、Morgenstern-Price 法^[5]、Sarma 法^[6]等。随着土体塑性理论的建立,极限定理的思想被用于边坡稳定性分析中,提出了极限分析法。20 世纪 70 年代后,随着计算机技术与有限元法的发展,应力应变数值分析方法被应开始用于边坡稳定性分析中。进入 21 世纪,各种数值分析方法被提出并引入到边坡稳定性分析中,使得边坡稳定性分析更加容易、准确。

目前,边坡稳定性分析方法主要基于平面应变展开,尤其在有关边坡工程设计规范及实际工程中依旧采用平面应变解。然而,实际边坡失稳破坏都呈现三维空间特性,破坏体的宽度是有限的,图 1 给出了一些边坡破坏形态。卢坤林^[7]整理了 522 个边坡失稳案例,统计发现大部分的滑坡宽高比介于 0.5~5.0 之间,平均值为 3.08。这说明实际边坡的破坏具有三维空间特性,而平面应变分析忽略了这种特性,从而对边坡稳定性分析结果产生影响。

在平面应变分析中往往选取实际边坡的某一横截面作为分析对象,然而实际边坡每个位置的横截面并非完全相同,而是呈现外凸、内凹、坡高变化等多种不一致的坡面形状。对于这种边坡,如果依旧采用平面应变分析法,其结果很大程度上取决于横截面的选取,且平面应变分析会忽略边坡的三维空间效应,低估实际边坡的稳定性。除了上述边坡外表形状的非一致性,边坡内部土体构成也常常呈现非一致性。这种非一致性不仅体现在随着土体深度变化,而且还体现在另外 2 个空间维度上。对于土体空间分布非一致性的边坡(边坡外表形状保持一致),在评价其稳定性时同样取决于横截面的选取。因此,对于非一致性的坡面形状和土体空间分布的边坡,常规的平面应变分析方法不能准确地评价其稳定性,需要开展三维边坡稳定性分析。

边坡的空间特性(滑动体的三维空间特性、边坡表面形状的空间特性、边坡内部土体分布的空间特性)已经充分说明三维边坡稳定性分析的必要性,更重要的意义在于边坡稳定性评估的准确性和反演滑坡土体强度的准确性。在工程实践中,由于平面应变分析简单易用,工程边坡主要采用平面应变解,其最重要的原因是工程边坡主要为均质边坡且表面形状一致,平面应变分析设计的边坡会相对更加安全,一定程度上提高了安全指标,但也不可避免地带来极大的经济与工程浪费。采用三维分析能准确地评估边坡稳定性,为工程决策者制定合适的设计方案提供可靠的参考依据。在滑坡治理中,反算滑坡土体的实际强度十分重要,这直接影响滑坡后边坡稳定性评估与边坡加固设计。这时若依旧采用平面应变分析方法反算,会高估滑坡土体的强度,从而产生很大的安全隐患。

三维边坡稳定性分析的意义不仅体现在工程应用上,还体现在学术研究上。近 30 年来,已经有一些专家学者开展了三维边坡稳定性分析,提出了不同的三维分析方法。相比于平面应变下的边坡稳定性分析方法,三维分析方法遇到了更多、更难以解决的困难。目前的三维边坡稳定性分析方法中还存在很多不足,需要进一步改进完善。

1 三维土质边坡稳定性分析方法国内外研究进展

三维土质边坡稳定性分析方法均是将平面应变下的二维分析方法拓展到三维空间,所以三维边坡稳定性分析方法主要可以分为:极限平衡法、极限分析法、数值分析法。

1.1 极限平衡法

极限平衡法是边坡稳定性分析的传统方法,一直被广泛应用。三维极限平衡法主要是将平面应变下的



图 1 实际边坡破坏形态(引自 Google 图片网)

Fig. 1 Failure modes of actual slopes
(from Google image search)

二维极限平衡法拓展到三维空间。Duncan^[8]于 1996 年对三维极限平衡法进行总结,将不同方法以表格形式给出,从中可以看出各种三维分析方法对应的理论基础与其适用条件,本文将不一一赘述。随着近 20 年计算机技术的快速发展,三维极限平衡法取得很多成果,根据各种方法的理论基础对其进行分类归纳,见表 1。

表 1 土质边坡稳定性三维极限平衡法汇总

Table 1 Summary of 3D limit equilibrium methods for earth slope stability analysis	
理论基础	代表作者(时间)
瑞典圆弧法	Baligh 等 ^[9] (1975),Hovland ^[10] (1977),Gens 等 ^[11] (1988)
Bishop 法	Hungr ^[12] (1987),Huang 等 ^[13] (2000),郑榕明等 ^[14] (2002)
Janbu 法	Hungr 等 ^[15] (1989),冯树仁等 ^[16] (1999),张均锋 ^[17] (2004),李亮等 ^[18] (2008)
Spencer 法	Chen 等 ^[19] (1983),Cavounidis ^[20] (1987),Zhang ^[21] (1988),陈祖煜等 ^[22] (2001),张均锋等 ^[23] (2005)
Sarma 法	李同录等 ^[24] (2003)
Morgenstern-Price 法	Zheng ^[25] (2012),陈昌富等 ^[26] (2010)
变分法	Leshchinsky 等 ^[27] (1985),Leshchinsky 等 ^[28] (1986),Baker 等 ^[29] (1987),Leshchinsky 等 ^[30] (1992)
其他方法	Fredlund 等 ^[31] (1993),Huang 等 ^[32] (2002),Cheng 等 ^[33] (2007),朱大勇等 ^[34] (2007),张常亮 ^[35] (2008),Pantelidis 等 ^[36] (2014)

表 1 列出的极限平衡方法为了使三维空间下的平衡问题静定可解,参照对应的平面应变分析方法,引入了各种假定,导致二维极限平衡法的固有缺陷依旧存在于三维极限平衡法中,Stark 等^[37]对此进行了总结。目前,三维极限平衡法的主要困难有 2 点:(a)引入使三维空间问题静定可解的假设;(b)三维滑动面的搜索与计算的收敛性。这 2 点会直接影响三维边坡稳定性评价,所以很多专家学者针对这 2 个困难开展了深入研究,取得了很多成果,同时人们还在不断地改进、完善三维极限平衡法。

1.2 极限分析法

Drucker 等^[38]于 1952 年最早将基于土体塑性力学理论建立的极限分析法引入到边坡稳定性问题中,其采用简单的直线平动机制和圆弧转动机制进行分析。Chen 等^[39]采用对数螺旋线的转动破坏机制,建立能量平衡方程,得到均质边坡稳定性的上限解。1975 年,Chen^[40]发表了专著《limit analysis and soil plasticity》,详细介绍了极限分析法的基本理论,并对三大稳定问题(地基承载力、挡土墙的侧向土压力、边坡稳定性)进行极限分析方法研究。该著作的出版大力推进了极限分析法在岩土工程分析中的应用,尤其是在边坡稳定性问题上的应用。

在平面应变下,根据极限分析上限定理可以容易地建立运动许可速度场,但是在三维空间下建立满足条件的运动许可速度场很困难。Drescher^[41]最早提出一种简单的边坡稳定性三维极限分析方法,构建一块体单元组成的三维平动破坏机制。随后,Michalowski^[42]将其拓展,提出了多块体单元组成的三维平动破坏机制;Farzaneh 等^[43-45]对其进行改进并用于非均质边坡稳定性分析中,分析时考虑了孔隙水压力的影响。与三维平动破坏机制相比,在三维空间下建立运动许可的转动破坏机制则困难许多。Michalowski 等^[46]构建一种“号角形”三维转动破坏机制,该机制是满足条件的运动许可速度场,当内摩擦角 $\varphi=0^\circ$ 时该机制退化为“圆环形”机制。当边坡宽度趋于无穷大时,为使破坏机制退化为平面应变下的对数螺旋线破坏机制,Michalowski 等^[46]在对称面中间插入一定宽度的对数螺旋线破坏机制。基于这种三维转动破坏机制,Michalowski^[47]采用优化方法给出了三维均质边坡临界高度的上限解并绘制了稳定图。随后 Michalowski 等^[48]采用拟静力法给出了地震作用下三维较陡边坡稳定性评价的稳定图;Michalowski 等^[49]参照 Michalowski^[50]的平面应变下孔隙水压力的计算方法,给出三维破坏机制下的孔隙水压力计算方法,绘制了孔隙水压力下的三维边坡稳定图。Gao 等^[51]针对三维转动破坏机制的缺陷对其进行改进,使其可以考虑土坡失稳的 3 种滑动方式,并且结合高效的随机搜索法计算更小的上限解。基于改进后的方法,Gao 等^[52-53]开展了不同因素影响条件下的三维土质边坡稳定性评价,如地震作用、库水位变化等。王浩然等^[54]基于三维转动破坏机制对含有软弱夹层的非均质边坡稳定性进行分析,建立了三维转动-平动组合破坏机制,通过将算例分析与有限元数值方法结果进行对比,验证了该方法的有效性。

上述方法都是传统的解析极限分析法,随着计算机技术与数值方法的快速发展,平面应变下的数值极限分析法被拓展到三维分析中。Chen 等^[55-56]基于 Donald 等^[57]的二维数值极限分析法建立了三维数值极限分

析法,将滑动体划分为具有一定倾斜的柱体单元,以此来构建运动许可的速度场,建立能量平衡方程,求解最小安全系数,并且将这种方法应用到实际边坡工程^[58-59]中。孙平^[60]基于三维数值极限分析法,引入与屈服准则非相关联流动法则,建立一种基于非相关联流动法则的三维边坡极限分析方法。Chen等^[61]对上述三维数值极限分析法进行改进,采用类似三维极限平衡法中的柱体单元,由于建立的能量平衡方程存在非线性特性,考虑一种高效的规划算法(SQP)得到三维边坡的最小安全系数,并且通过几个经典算例对比了不同方法下的安全系数,验证了该方法的有效性,指出改进的三维数值极限分析法可以推广应用到实际边坡工程中。上面几种三维数值极限分析方法都是建立在极限分析上限定理基础上的,Lyamin等^[62-63]将Sloan^[64-65]提出的有限元极限分析理论拓展到三维空间中,建立了三维有限元极限分析上下限方法,随后Li等^[66-67]采用这种方法分析了均质与非均质三维边坡稳定性,给出一系列稳定图供工程应用。

与传统的极限分析方法(如Chen^[40]、Michalowski等^[46])一样,在三维空间下建立满足运动许可速度场要求的三维破坏机制还很少,很难确定三维均质边坡的最危险破坏机制。然而,数值极限分析方法可以通过有限元法直接搜索得到运动许可的速度场,从而避免预先构建满足条件的三维破坏机制。Sloan^[64-65]提出的有限元极限分析法可以计算三维边坡稳定问题的上限解和下限解,但是从其结果上看上限解和下限解还存在较大差距,只能简单地选取两者的平均值作为“标准”值。因此数值极限分析方法还需要以传统的极限分析下的上限解作为判定标准,以此来验证数值极限分析法的结果,使得数值极限分析法更加可靠地推广到更为复杂的边坡问题中。

1.3 数值分析法

随着计算机技术的快速发展,数值分析法也被推广应用到三维土质边坡稳定性分析中。三维土质边坡稳定性数值方法主要包括有限元法(FEM)、有限差分法(FDM)。Iefebvre等^[68]最早将三维有限元法用于边坡问题分析,模拟河谷地形下三维坝体的应力应变状态。Yu等^[69]采用有限元法分析河谷地形下三维土石坝的稳定性,探究坝体的几何形状和河谷地形对土石坝稳定性的影响规律。有限元法分析边坡稳定性最大的优势在于其可以分析边坡内部任意位置的应力应变状态,通过可视化工具显示整个边坡的应力应变。对于边坡稳定性评价来说,则需要基于极限平衡法下安全系数的定义思想,提出强度折减法,对边坡土体强度参数(黏聚力 c 和内摩擦角 φ)进行一定系数下的折减,直到边坡处于临界稳定状态,此时的折减系数为边坡的安全系数,定义如下式:

$$c_d = \frac{c}{S_{RF}} \quad (1)$$

$$\varphi_d = \tan^{-1} \left(\frac{\tan \varphi}{S_{RF}} \right) \quad (2)$$

式中: c_d 、 φ_d ——边坡极限稳定状态时土体的黏聚力与内摩擦角; S_{RF} ——折减系数,即边坡安全系数。

Ugai^[70]基于弹塑性有限元法,采用强度折减法对三维均质边坡稳定性进行了分析,判定位移增量在500次迭代下小于 10^{-5} 为边坡的临界状态,得到临界状态下的安全系数,其结果与Leshchinsky的变分极限平衡法的结果一致。随后Ugai等^[71]将孔隙水压力引入强度折减法中,分析降水条件下三维边坡稳定性。Griffiths等^[72]对强度折减法的临界状态提出以节点位移的收敛性为判定标准,并对几个经典非均质三维边坡算例进行计算,通过对比分析发现这种方法计算的安全系数与传统的极限平衡的安全系数基本一致。Nian等^[73]基于Griffiths等^[72]的判定标准对三维边坡的各种几何特点进行了分析,得到很多有现实意义的结论。Gharti等^[74]引入谱单元法对弹塑性有限单元法进行改进,使其可以广泛地用于更为复杂的边坡稳定性分析。国内采用三维有限元分析边坡稳定性的成果相对较少,只有少数几位学者^[75-78]对这方面开展了研究。基于有限差分法的三维边坡稳定性分析研究较少,主要集中在使用基于有限差分法的软件FLAC3D,Chugh^[79]和Zhang等^[80-81]采用这个软件分析边界条件和边坡几何特性对三维边坡稳定性的影响。

有限单元法和有限差分法在评价三维边坡稳定性时,与其在平面应变分析下一样,依旧存在2个重要问题:边坡临界状态的判定标准和临界滑动面位置的确定,由于增加了一个维度,使这2个问题更加难以解决。但是这2种数值分析法的优点很突出,主要表现在:(a)不需要考虑太多的假定(如滑动面的形状和位置、条间力的假设等);(b)可以解决复杂条件下的边坡问题(如边坡外形、地质条件、复杂荷载等);(c)可以模拟边坡的渐进性破坏过程,得到任意位置的应力、应变、位移等信息。因此,数值三维分析法可以很好地应用于

工程实践中,但是工程人员熟练掌握还很困难,因此目前还很少被用于实际工程中。

2 已有三维分析方法研究存在的困难

随着计算机技术和数值方法的快速发展,数值分析法由于其显著的优势,尤其在复杂问题的处理和后处理分析上,越来越多地被应用到工程实践中。加之可视化界面和易操作性上的完善,使得更多工程人员熟练掌握这种方法。国际著名边坡分析专家 Duncan^[82]在2013年的美国土木工程师协会(ASCE)的岩土工程年会上,针对“边坡与堤坝工程”主题给出了边坡稳定性分析未来的发展方向——数值分析法。但是这并未否定传统的解析分析法(极限平衡法和极限分析法)的研究意义,相反对边坡稳定性解析法提出了更高的要求,以满足数值分析法的发展需要。数值分析法首先要在简单边坡问题上与传统的理论分析方法在结果上保持一致,只有这样才能验证其结果的有效性,推广到复杂问题中。因此,数值分析法的发展还是依赖于极限平衡法和极限分析法下更为严格的理论解答。

在已有的各种常用的平面应变分析方法(如极限平衡法、极限分析法、有限元法)对比分析研究中^[40, 83],对于均质边坡稳定评价结果基本保持一致,可以认为准确地评价了边坡稳定性。其中 Leshchinsky 等^[84]采用变分法严格证明了二维均质边坡极限平衡闭合解对应的最危险破坏机制是对数螺旋线,并且证明了变分极限平衡法与极限分析上限解法是等效的。因此,对于平面应变下的均质边坡稳定性可以将 Chen^[40]和 Michalowski^[85]给出的上限解作为平面应变下数值分析方法的评估标准。三维边坡稳定性分析方法都是将传统的平面应变分析方法拓展到三维空间中。表1列出了三维边坡稳定性极限平衡法的研究进展,其中二维极限平衡法固有的缺陷依然没有解决,有的缺陷在复杂的三维分析中甚至得到放大,对三维边坡稳定性评价的准确性产生了一定影响。对于极限分析法,在三维空间下建立运动许可的速度场还很困难,尤其对于内摩擦角 $\varphi > 0$ 的土质边坡,目前仅提出了3种三维破坏机制(2种平动机制^[41-42]和1种转动机制^[46])。在平面应变分析中,平动破坏机制仅仅是转动破坏机制的特例,仅发生在较陡的边坡中,转动破坏机制一直被认为是二维均质边坡的最危险破坏方式。在三维破坏机制中,只有 Michalowski 等^[46]建立了转动破坏机制,然而该机制还存在一定缺陷。Gao 等^[51]对转动破坏机制进行了改进,克服了原有破坏机制使用的局限性,完整地考虑了边坡3种不同破坏模式,采用更高效的优化方法得到更小的上限解。为了进一步验证转动破坏机制的临界性,Gao 等^[52]将其与有限元-极限分析法的上下限解进行对比分析,发现该三维破坏机制下的上限解小于数值极限分析上限解且逼近下限解。尽管如此,该三维转动破坏还不能被认为是均质土坡的最危险破坏机制,此外,三维转动破坏机制假设破坏土体单元上的切应力始终与破坏机制的对称中心面平行,这一假设条件不能真实地反映实际边坡土体破坏的应力状态,从而一定程度上会影响三维边坡稳定性的分析结果。尽管已有研究建立了一些适用于土质边坡的运动许可的三维破坏机制,但是这些假设的三维机制不能完全反映实际边坡破坏面上的土体应力状态,且无法验证为均质土坡的最危险破坏机制,所以其给出的三维均质边坡稳定性上限解还很难作为标准去评价数值解。

目前实际工程中所使用的二维边坡稳定性分析软件大多基于传统的极限平衡法,许多分析结果(尤其对于非均质边坡)表明极限平衡法对实际边坡稳定性评价有很好的指导意义,这意味着极限平衡法在理论上是可靠的。同时许多岩土工程师对平面应变下的极限平衡法理论比较熟悉,尽管三维极限平衡法相对复杂许多,他们还是容易掌握三维分析理论。三维边坡稳定性极限平衡法还无法被广大工程师所认同和采用的主要原因:(a)三维极限平衡法的简化假设;(b)相应的软件开发很少。因此,还需要从最基本的假设入手,特别对于非对称、非均质边坡问题,需要完善、建立可靠的三维边坡稳定性极限平衡法。

3 三维土质边坡稳定性分析方法研究展望

三维土质边坡稳定性分析方法在20世纪已经得到了许多学者的关注,主要集中在极限平衡法和极限分析法的改进与完善。随着计算机技术和数值方法的发展,有限元数值分析方法已经是土质边坡稳定性分析研究的热点问题之一。三维有限元法在近20年里得到了发展与广泛应用,但是其还存在许多难点尚未克服,Duncan^[82]在2013年的美国土木工程师协会举办的岩土专题会议上特别指出了其中需要进一步解决的关键问题,从而促进更多专家学者关注这方面研究,使得有限元三维分析可以更好地用于边坡稳定性分析中。综合三维土质边坡稳定性分析方法的研究现状与进展,无论传统的极限方法还是先进的数值方法,它们

的优缺点共存,还有许多关键问题需要解决。为此,总结如下:

a. 与传统的分析方法相比,数值分析法(主要包括有限元法、有限差分法)的优势明显,特别在分析边坡渐进性破坏过程和变形特性上,但是与室内或现场试验结果还存在一定差异,还需要进一步完善。此外,在三维边坡稳定性评价时,临界破坏标准尚未统一。

b. 三维土质边坡极限平衡/极限分析法近来发展缓慢,主要受假设和滑动面搜索方法的制约,因此导致三维分析方法还无法像平面应变分析方法那样被广泛应用。针对不同的方法假设,可以进一步改进与完善,结合更高效的优化计算方法,使这一传统方法在三维土质边坡稳定性分析中获得新生。目前这方面研究依然停留在理论方法上,软件开发较少,大部分的边坡稳定性分析软件还是基于平面应变解,这也一定程度上制约了其推广与应用。

c. 与单一的传统分析方法相比,几种方法理论的相互融合也逐步得到发展,从而充分发挥各自方法的优势,更好地用于边坡稳定性分析中,如有限元数值极限分析法、可靠度-有限元法等。这些新方法不仅继承了传统分析方法的特点,而且展现了新方法的优点,这也给三维边坡稳定性分析方法研究提供了新思路。

4 结 语

通过对三维土质边坡稳定性分析方法的国内外研究现状的回顾(这里主要关注了3种常用的方法:极限平衡法、极限分析法、数值分析法),总结了不同方法的优缺点。结合已有分析方法发展面临的困难和近些年的发展趋势,给出了几点展望,希望可以对这一领域今后的研究思路提供借鉴,从而促进三维土质边坡稳定性分析方法可以在实际工程中得到广泛认可和推广应用。

参考文献:

- [1] FELLENIUS W O. Erdstatistisch berechnungen [M]. Berlin W: Ernst und Sohn, 1927.
- [2] BISHOP A W. The use of slip circle in the stability analysis of slopes[J]. Geotechnique, 1955, 5(1): 7-17.
- [3] JANBU N. Slope stability computations [R]. Trondheim: Technical University of Norway, 1968.
- [4] SPENCER E A. A method of analysis of embankments assuming parallel inter-slice forces[J]. Geotechnique, 1967, 17(1): 11-26.
- [5] MORGENSTERN N R, PRICE V E. The analysis of stability of general slip surface [J]. Geotechnique, 1965, 15(1): 79-93.
- [6] SARMA S K. Stability analysis of embankments and slopes[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1979, 105(12): 1511-1524.
- [7] 卢坤林. 基于极限平衡理论的土质边坡空间效应研究及应用[D]. 合肥:合肥工业大学, 2013.
- [8] DUNCAN J M. State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slopes[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 122(7): 577-596.
- [9] BALIGH M M, AZZOUZ A S. End effects on stability of cohesive slopes[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1975, 101(11): 1105-1117.
- [10] HOVLAND H J. Three-dimensional slope stability analysis method[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1977, 103(9): 971-986.
- [11] GENS A, HUTCHINSON J N, CAVOUNIDIS S. Three-dimensional analysis of slides in cohesive soils[J]. Geotechnique, 1988, 38(1): 1-23.
- [12] HUNGR O. An extension of bishops simplified method of slope stability analysis to three dimensions[J]. Geotechnique, 1987, 37(1): 113-117.
- [13] HUANG C C, TSAI C C. New method for 3D and asymmetrical slope stability analysis[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2000, 126(10): 917-927.
- [14] 郑榕明,朱禄娟,谷兆祺. 非对称旋转破坏的三维 Bishop 边坡稳定算法[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(6): 706-709. (ZHENG Rongming, ZHU Lujuan, GU Zhaoqi. Rotational failure of 3D non-symmetric slope predicted by Bishop's method [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(6): 706-709. (in Chinese))
- [15] HUNGR O, SALGADO F M, BYME P M. Evaluation of a three-dimensional method of slope stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1989, 26(4): 679-686.
- [16] 冯树仁,丰定祥,葛修润,等. 边坡稳定性的三维极限平衡分析方法及应用[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(6): 657-661.

- (FENG Shuren, FENG Dingxiang, GE Xiurun, et al. 3D limit equilibrium method for slope stability and its application [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, 21(6): 657-661. (in Chinese))
- [17] 张均锋. 三维简化 Janbu 法分析边坡稳定性的扩展[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(17): 2876-2881. (ZHANG Junfeng. Extension of three-dimensional simplified Janbu's method for slope stability analysis [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(17): 2876-2881. (in Chinese))
- [18] 李亮, 迟世春, 郑榕明. 基于椭球滑动体假定和三维简化 JANBU 法的边坡稳定分析[J]. 岩土力学, 2008, 29(9): 2439-2445. (LI Liang, CHI Shichun, ZHENG Rongming. Three-dimensional slope stability analysis based on ellipsoidal sliding body and simplified JANBU method [J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(9): 2439-2445. (in Chinese))
- [19] CHEN R H, CHAMEAU J L. Three-dimensional limit equilibrium-analysis of slopes [J]. Geotechnique, 1983, 33(1): 31-40.
- [20] CAVOUNIDIS S. On the ratio of factors of safety in slope stability analyses[J]. Geotechnique, 1987, 37(2): 207-210.
- [21] ZHANG X. Three-dimensional stability analysis of concave slopes in plan view[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1988, 114(6): 658-671.
- [22] 陈祖煜, 弥宏亮, 汪小刚. 边坡稳定三维分析的极限平衡方法[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(5): 525-529. (CHEN Zuyu, MI Hongliang, WANG Xiaogang. A three-dimensional limit equilibrium method for slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(5): 525-529. (in Chinese))
- [23] 张均锋, 王思莹, 祈涛. 边坡稳定分析的三维 Spencer 法[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(19): 36-41. (ZHANG Junfeng, WANG Siying, QI Tao. Three-dimensional Spencer method for slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(19): 36-41. (in Chinese))
- [24] 李同录, 王艳霞, 邓宏科. 一种改进的三维边坡稳定性分析方法[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(5): 611-614. (LI Tonglu, WANG Yanxia, DENG Hongke. An improved method for three-dimensional slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 25(5): 611-614. (in Chinese))
- [25] ZHENG H. A three-dimensional rigorous method for stability analysis of landslides[J]. Engineering Geology, 2012, 145: 30-40.
- [26] 陈昌富, 朱剑锋. 基于 Morgenstern-Price 法边坡三维稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(7): 1473-1480. (CHEN Changfu, ZHU Jianfeng. A Three-dimensional slope stability analysis procedure based on Morgenstern-Price method [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(7): 1473-1480. (in Chinese))
- [27] LESHCHINSKY D, BAKER R, SILVER M. Three dimensional analysis of slope stability[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1985, 9(3): 199-223.
- [28] LESHCHINSKY D, BAKER R. Three-dimensional slope stability: end effects[J]. Soils and Foundations, 1986, 26(4): 98-110.
- [29] BAKER R, LESHCHINSKY D. Stability analysis of conical heaps[J]. Soils and Foundations, 1987, 27(4): 99-110.
- [30] LESHCHINSKY D, HUANG C. Generalized three-dimensional slope stability analysis[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1992, 118(11): 1748-1764.
- [31] FREDLUND L, LAM D G. A general limit equilibrium model for three-dimensional slope stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1993, 30(6): 905-919.
- [32] HUANG C, TSAI C, CHEN Y. Generalized method for three-dimensional slope stability analysis[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2002, 128(10): 836-848.
- [33] CHENG Y M, YIP C J. Three-dimensional asymmetrical slope stability analysis extension of Bishop's, Janbu's, and Morgenstern-Price's techniques[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2007, 133(12): 1544-1555.
- [34] 朱大勇, 钱七虎. 三维边坡严格与准严格极限平衡解答及工程应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(8): 1513-1528. (ZHU Dayong, QIAN Qihu. Rigorou and quasi-rigorous limit equilibrium solutions of 3D slope stability and application to engineering[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(8): 1513-1528. (in Chinese))
- [35] 张常亮. 边坡稳定性三维极限平衡法研究[D]. 西安: 长安大学, 2008.
- [36] PANTELIDIS L, GRIFFITHS D V. Stability of earth slopes. part II: three dimensional analysis in closed-form[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, 37(13): 1987-2004.
- [37] STARK T D, EID H T. Performance of three-dimensional slope stability methods in practice[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1998, 124(11): 1049-1060.
- [38] DRUCKER D C, PRAGER W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1952, 10(2): 157-165.
- [39] CHEN W F, GIGER M W, FANG H Y. Limit analysis of stability of slopes[J]. Soils and Foundations, 1969, 9(4): 23-32.

- [40] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity [M]. Rotterdam; Elsevier, 1975.
- [41] DRESCHER A. Limit plasticity approach to piping in bins [J]. Journal of Applied Mechanics, 1983, 50(3): 549-553.
- [42] MICHALOWSKI R L. Three-dimensional analysis of locally loaded slopes[J]. Geotechnique, 1989, 39(1): 27-38.
- [43] FARZANEH O, ASKARI F. Three-dimensional analysis of nonhomogeneous slopes [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2003, 129(2): 137-145.
- [44] ASKARI F, FARZANEH O. Pore water pressures in three dimensional slope stability analysis[J]. International Journal of Civil Engineering, 2008, 6(1): 10-23.
- [45] FARZANEH O, ASKARI F, GANJIAN N. Three-dimensional stability analysis of convex slopes in plan view[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2008, 134(8): 1192-1200.
- [46] MICHALOWSKI R L, DRESCHER A. Three-dimensional stability of slopes and excavations[J]. Geotechnique, 2009, 59(10): 839-850.
- [47] MICHALOWSKI R L. Limit analysis and stability charts for 3D slope failures[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2010, 136(4): 583-593.
- [48] MICHALOWSKI R L, MARTEL T. Stability charts for 3D failures of steep slopes subjected to seismic excitation[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2011, 137(2): 183-189.
- [49] MICHALOWSKI R L, NADUKURU S. Three-dimensional limit analysis of slopes with pore pressure[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2013, 139(9): 1604-1610.
- [50] MICHALOWSKI R L. Slope stability analysis: a kinematical approach [J]. Geotechnique, 1995, 45(2): 283-293.
- [51] GAO Yufeng, ZHANG Fei, LEI Guohui, et al. An extended limit analysis of three-dimensional slope stability [J]. Geotechnique, 2013, 63(6): 518-524.
- [52] GAO Yufeng, ZHANG Fei, LEI Guohui, et al. Stability charts for 3D failures of homogeneous slopes[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2013, 139(9): 1528-1538.
- [53] GAO Yufeng, ZHU Desheng, ZHANG Fei, et al. Stability analysis of three-dimensional slopes under water drawdown conditions [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2014, 51(11): 1355-1364.
- [54] 王浩然,黄茂松,刘怡林. 含软弱夹层边坡的三维稳定性极限分析[J]. 岩土力学, 2013, 34(增刊2): 156-160.(WANG Haoran, HUANG Maosong, LIU Yilin. Three-dimensional stability analysis of slope with weak interlayer[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(Sup2): 156-160. (in Chinese))
- [55] CHEN Zuyu, WANG Xiaogang, HABERFIELD C, et al. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem. part I: theory and methods[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2001, 38(3): 369-378.
- [56] CHEN Zuyu, WANG Jian, WANG Yujie, et al. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem. part II: numerical approaches, applications and extensions[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2001, 38(3): 379-397.
- [57] DONALD I B, CHEN Zuyu. Slope stability analysis by the upper bound approach: fundamentals and methods[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1997, 34(6): 853-862.
- [58] 弥宏亮,陈祖煜,张发明,等. 边坡稳定三维极限分析方法及工程应用[J]. 岩土力学, 2002, 23(5): 649-653.(MI Hongliang, CHEN Zuyu, ZHANG Faming, et al. The 3D method for slope stability analysis and applications[J]. Rock and Soil Mechanics, 2002, 23(5): 649-653. (in Chinese))
- [59] 杨健,王玉杰,陈祖煜,等. 水电站进水口高边坡稳定性三维极限分析[J]. 岩土力学, 2004, 25(6): 991-994.(YANG Jiang, WANG Yujie, CHEN Zuyu, et al. 3D limit analysis of stability of slope at intake of huge hydropower station[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(6): 991-994. (in Chinese))
- [60] 孙平. 基于非相关流动法则的三维边坡稳定极限分析[D]. 北京:中国水利水电科学研究院, 2005.
- [61] CHEN J, YIN J H, LEE C F. A three-dimensional upper-bound approach to slope stability analysis based on RFEM[J]. Geotechnique, 2005, 55(7): 549-556.
- [62] LYAMIN A V, SLOAN S W. Lower bound limit analysis using non-linear programming[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 55(5): 573-611.
- [63] LYAMIN A V, SLOAN S W. Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, 26(2): 181-216.
- [64] SLOAN S W. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. International Journal for Numerical

- and Analytical Methods in Geomechanics, 1988, 12(1): 61-77.
- [65] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1989, 13(3): 263-282.
- [66] LI A J, MERIFIELD R S, LYAMIN A V. Limit analysis solutions for three dimensional undrained slopes[J]. Computers and Geotechnics, 2009, 36(8): 1330-1351.
- [67] LI A J, MERIFIELD R S, LYAMIN A V. Three-dimensional stability charts for slopes based on limit analysis methods [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2010, 47(12): 1316-1334.
- [68] IEFEBVRE G, DUNCAN J M, WILSON E L. Three-dimensional finite element analysis of dams [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1973, 99(SM7): 495-507.
- [69] YU Y, XIE L, ZHANG B. Stability of earth-rockfill dams: influence of geometry on the three-dimensional effect[J]. Computers and Geotechnics, 2005, 32: 326-339.
- [70] UGAI K. Three-dimensional stability analysis of vertical cohesive slopes[J]. Soils and Foundations, 1985, 25(3): 41-48.
- [71] UGAI F, WAKAI K, LI A, et al. Effects of horizontal drains on slope stability under rainfall by three-dimensional finite element analysis [J]. Computers and Geotechnics, 1998, 23(4): 255-275.
- [72] GRIFFITHS D V, MARQUEZ R M. Three-dimensional slope stability analysis by elasto-plastic finite elements [J]. Geotechnique, 2007, 57(6): 537-546.
- [73] NIAN T K, HUANG R Q, WAN S S, et al. Three-dimensional strength-reduction finite element analysis of slopes: geometric effects [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2012, 49(5): 574-588.
- [74] GHARTI H N, OYE V, KOMATITSCH D, et al. Application of an elastoplastic spectral-element method to 3D slope stability analysis [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2012, 91(1): 1-26.
- [75] 马建勋, 赖志生, 蔡庆娥, 等. 基于强度折减法的边坡稳定性三维有限元分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(16): 2690-2693. (MA Jianxun, LAI Zhisheng, CAI Qing'e, et al. 3D FEM analysis of slope stability based on strength reduction method [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(16): 2690-2693. (in Chinese))
- [76] 宋雅坤, 郑颖人, 赵尚毅, 等. 有限元强度折减法在三维边坡中的应用研究[J]. 地下空间与工程学报, 2006, 2(5): 822-827. (SONG Yakun, ZHENG Yingren, ZHAO Shangyi, et al. Application of three-dimensional strength reduction FEM in slope [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2006, 2(5): 822-827. (in Chinese))
- [77] 刘耀儒, 杨强, 薛利军, 等. 基于三维非线性有限元的边坡稳定分析方法[J]. 岩土力学, 2007, 28(9): 1894-1898. (LIU Yaoru, YANG Qiang, XUE Lijun, et al. Slope stability analysis based on 3-D nonlinear finite element method [J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(9): 1894-1898. (in Chinese))
- [78] 方建瑞, 许志雄, 庄晓莹. 三维边坡稳定弹塑性有限元分析与评价[J]. 岩土力学, 2008, 29(10): 2667-2672. (FANG Jianrui, XU Zhixiong, ZHUANG Xiaoying. Appraisal and analysis of three-dimensional slope stability based on elastoplastic FEM [J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(10): 2667-2672. (in Chinese))
- [79] CHUGH A K. On the boundary conditions in slope stability analysis[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2003, 27: 905-926.
- [80] ZHANG Yingbin, CHEN Guangqi, ZHENG Lu, et al. Effects of geometries on three-dimensional slope stability [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2013, 50(3): 233-249.
- [81] ZHANG Yingbin, CHEN Guangqi, WANG Bo, et al. An analytical method to evaluate the effect of a turning corner on 3D slope stability [J]. Computers and Geotechnics, 2013, 53: 40-45.
- [82] DUNCAN J M. Slope stability then and now [C]//CHRISTOPHER M, DANIEL P, MIGUEL A P, et al. Geo-Congress 2013. San Diego: American Society of Civil Engineers, 2013.
- [83] YU H S, SALGADO R, SLOAN S W, et al. Limit analysis versus limit equilibrium for slope stability [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1998, 124(1): 1-11.
- [84] LESHCHINSKY D, SMITH D S. Deep-seated failure of granular embankment over clay: stability analysis [J]. Soils and Foundations, 1989, 29(3): 105-114.
- [85] MICHALOWSKI R L. Stability charts for uniform slopes[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2002, 128(4): 351-355.