

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2016.05.010

模袋砂堤防沉降量预测的分数阶灰色模型

李倩¹,周星德¹,周子言²

(1. 河海大学土木与交通学院,江苏 南京 210098;2. 河海大学文天学院,安徽 马鞍山 243031)

摘要: 为获得更优的模袋砂堤防沉降预测结果,基于灰色模型,提出一种分数阶灰色模型。运用 MATLAB 语言编写了相关程序,实现微分阶次到分数阶的改变,并运用该模型对模袋砂滩涂围垦测试的沉降结果进行实例分析。分数阶灰色模型与灰色 Verhulst 模型、残差 GM 模型、GM(1,1) 模型对比分析表明:(a) 分数阶灰色模型预测结果更精确,其不仅具有 GM(1,1) 模型前期预测效果好的优点,而且具有灰色 Verhulst 模型后期预测效果好的优点;(b) 分数阶灰色模型的中长期预测结果稳定性比残差 GM 模型好。

关键词: 模袋砂堤防;沉降量预测;分数阶;灰色模型;灰色 Verhulst 模型;残差 GM 模型

中图分类号: U213.1⁺57

文献标志码: A

文章编号: 1000-1980(2016)05-0438-05

A fractional-order grey model for prediction of settlement of dykes with fabric form sand

LI Qian¹, ZHOU Xingde¹, ZHOU Ziyan²

(1. College of Civil and Transportation Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Wentian College, Hohai University, Maanshan 243031, China)

Abstract: In order to acquire better forecast results for settlements of dykes with fabric form sand, a fractional-order grey model is presented based on the grey model. The program was established using MATLAB to change the differential-order derivative into a fractional-order one. This model was used to predict the settlement of dykes with fabric form sand. Comparative analysis of the grey Verhulst model, residual GM model, and proposed model was performed. The results show that the predicted results of the fractional-order grey model are more accurate, and the fractional-order grey model not only has the reliable previous forecast effect of the GM(1, 1) model, but also the reliable later forecast effect of the Grey Verhulst model. Moreover, the long-term forecast results of the fractional-order grey model show a higher degree of stability than those of the GM model.

Key words: dyke with fabric form sand; settlement prediction; fractional-order; grey model; grey Verhulst model; residual GM model

海堤工程是海涂围垦中至关重要的一环,海堤工程的成败直接关系到人民生命财产的安全,影响围垦事业的发展。模袋砂多用于临时围堰,随着技术的发展,目前已经出现了采用模袋砂构筑的堤防。海堤多建于软土地基上,为确保地基能在稳定状态下工作,在施工过程中及完工后必须对其进行有效监测和信息反馈。有关地基沉降预测的方法有很多,沉降曲线多符合指数函数^[1],而实际测量结果总会产生奇异,对这种现象,分形理论具有较好的处理^[2-3];多数预测方法具有分段预测的特点,即间或前期预测好,间或后期预测好,为此出现了组合预测方法^[4];目前公认较好的预测方法当属灰色模型^[5-7],主要包括 GM(1,1)模型^[8]、灰

收稿日期: 2015-10-27

基金项目: “十二五”国家科技支撑计划项目(2012BAB03B00);安徽省建设行业科学技术计划项目(2015YF-26)

作者简介: 李倩(1992—),女,江苏连云港人,硕士研究生,主要从事堤防稳定性及岩土工程数值分析研究。E-mail: 15195865755@

163.com

通信作者: 周星德,教授。E-mail: xingdezhou@hhu.edu.cn

色 Verhulst 模型和残差 GM 模型^[9-10],其中 GM(1,1)模型对后期预测效果不好,灰色 Verhulst 模型对前期预测效果差^[11-12],残差 GM 模型适用于中长期预测。

从本质上讲,灰色模型采用整数阶导数反映地基的沉降,如:一阶、二阶导数,这是间断的,中间缺少分数,如 3/2 等,而实际情况千变万化,符合整数阶导数规律的只是其中一小部分情况,因此分数阶模型与实际情况更吻合^[13]。基于灰色模型,笔者提出一种分数阶灰色模型,具体过程如下:首先,根据灰色模型算法确定系数项和常数项,变整数阶导数为分数阶导数;其次,通过 Laplace 变换改为频域表示,假设外激励为由灰色模型所确定的常数项,构造传递函数;再次,采用 Oustaloup 算法^[14]对分数阶进行逼近,通过仿真曲线的走势来确定分数阶的阶次,进而提出采用一个调节因子以达到与测试数据的最佳吻合。最后,基于文献[15]提供的数据,通过 GM(1,1)模型、灰色 Verhulst 模型、残差 GM 模型及本文方法间的对比分析,验证本文方法的有效性。

1 灰色模型

灰色模型^[5-7](GM(1,1)模型)的特点是对沉降前期预测较好,设 n 个等距时间序列数据为

$$\bar{x}_0 = [x_0(1) \quad x_0(2) \quad \cdots \quad x_0(n)] \quad (1)$$

式(1)进行一次累加,可得

$$\bar{x}_1 = [x_1(1) \quad x_1(2) \quad \cdots \quad x_1(n)] \quad (2)$$

其中

$$x_1(k) = \sum_{i=1}^k x_0(i)$$

$x_1(k)$ 微分方程模型为

$$\frac{dx_1}{dt} + ax_1 = b \quad (3)$$

$$\text{其中 } [a \ b]^T = (\tilde{B}^T \tilde{B})^{-1} \tilde{B}^T \tilde{A} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} -z_1(2) & 1 \\ -z_1(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z_1(n) & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} x_0(2) \\ x_0(3) \\ \vdots \\ x_0(n) \end{bmatrix} \quad z_1(k) = 0.5(x_1(k-1) + x_1(k))$$

式中: a ——系数项; b ——常数项。

式(3)的时间响应序列解为

$$x_1(k+1) = (x_1(1) - \frac{b}{a})e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (4)$$

改进的灰色模型中,较普遍的2种为灰色 Verhulst 模型和残差 GM 模型。灰色 Verhulst 模型的特点是对沉降后期预测较好,其模型的微分方程为

$$\frac{dx_1}{dt} + ax_1 = bx_1^2 \quad (5)$$

式(5)的计算过程与灰色模型完全相同,仅计算中采用的矩阵 $\tilde{B}$ 为

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} -z_1(2) & (z_1(2))^2 \\ -z_1(3) & (z_1(3))^2 \\ \vdots & \vdots \\ -z_1(n) & (z_1(n))^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式(5)的时间响应序列解为

$$x_1(k+1) = \frac{ax_1(1)}{bx_1(1) + (a - bx_1(1))e^{ak}} \quad (7)$$

残差 GM 模型是利用残差序列建立模型,对原模型进行修正,残差序列为 $e_0(k) = x_1(k) - \hat{x}_1(k)$, 其中 $\hat{x}_i$ 为预测值。利用此序列的绝对值作为原始数列,建立残差灰色预测模型^[9-10]。残差 GM 模型的精度比 GM(1,1) 模型好,适用于中长期预测。

2 分数阶灰色模型

通常使用的导数,如一阶导数、二阶导数,称为整数阶导数,是间断的,中间缺少分数,如 3/2 阶导数。有关分数阶的研究近年来开始受到重视,这是由于它是连续的,能够更好地反映实际情况^[13]。目前有关分数阶的定义有 4 种,本文采用 Riemann-Liouville 微积分定义,对于初值为零的 β 阶导数可表示为

$$D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \frac{d^m}{dt^m} \left[\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-m+1}} d\tau \right] \quad (8)$$

式中: β ——分数, $m-1 < \beta \leq m$; m ——临近 β 的整数; $\Gamma(\cdot)$ ——Gamma 函数。

式(5)所表示的模型为整数阶模型,为了扩展其应用范围,可改写为如下分数阶模型:

$$D_t^\beta x_1(t) + ax_1(t) = b(x_1(t))^2 \quad (9)$$

假设外激励为常数项 b , 对式(9)进行 Laplace 变换,则频域表示为

$$H(s) = \frac{1}{s^\beta + a} \quad (10)$$

采用 Oustaloup 算法对分数阶进行逼近,拟合频率段为 (ω_l, ω_h) , 则可构造如下滤波器的传递函数:

$$G(s) = K \prod_{j=-N}^N \frac{s + \omega_j^a}{s + \omega_j} \quad (11)$$

$$\text{其中} \quad K = (\omega_h)^\alpha \quad \omega_j^a = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{j+N+0.5(1-\alpha)}{2N+1}} \quad \omega_j = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{j+N+0.5(1+\alpha)}{2N+1}}$$

式中: N ——整数; $2N+1$ ——滤波器的阶次。

用 $G(s)$ 代替式(10)中的 s^β , 可得

$$H(s) = \frac{s^{n_i} + a_1 s^{n_i-1} + \cdots + a_{n_i-1} s + a_{n_i}}{s^{n_i} + b_1 s^{n_i-1} + \cdots + b_{n_i-1} s + b_{n_i}} \quad (12)$$

$n_i = 2N+1$

其中

把式(12)转换为状态方程:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}b \\ \tilde{x}_1(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + Db \end{cases} \quad (13)$$

式中: $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ ——变换矩阵; $\mathbf{X}$ ——状态变量; D ——系数。

由于分数阶导数与初值有关,因此由式(13)所确定 $\tilde{x}_1(t)$ 应该补充一个常数,即

$$x_1(t) = \tilde{x}_1(t) + c \quad (14)$$

其中

$$c = x_1(n) - \tilde{x}_1(n)$$

式中: c ——补充的常数,也称为调节因子

3 实例分析

为验证本文方法的有效性,以文献[15]中的实例为对象进行分析,所取数据为客运专线无碴轨道 DK1268+835 路基中心处每 10 d 的沉降值(单位:mm) $\bar{x}_0 = [1.65 \ 1.57 \ 1.30 \ 1.14 \ 1.01 \ 1.18 \ 0.93 \ 0.73]$ 。

GM(1,1) 模型预测序列为

$$x_0(k+1) = -1.6618e^{-0.1035k} \quad (15)$$

灰色 Verhulst 模型预测序列为

$$x_0(k+1) = -\frac{1}{3.6479 + 2.9392e^{-0.1982k} + 1.1208e^{0.1982k}} \quad (16)$$

残差 GM 模型对残差序列进行灰色建模,结果见表 1。

采用本文方法,滤波器在频域内近似时, $N=4$,拟合频率段为 $[0,1\ 000]$ (单位:rad/s),通过式(14)可确定调节因子为8,然后通过不断变动分数阶 β 确定最佳拟合效果,最终确定阶次为0.3142,即

$$D_t^{0.3145} x_1(t) + 0.1035 x_1(t) = 1.7481 \quad (17)$$

由式(11)确定 s^β ,代入式(12),即可获得的 $H(s)$,进而可转换为式(13)表示的状态方程,限于篇幅,这里仅给出状态方程结果:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad B^T = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \quad D = 0.1155$$

$$C = [0\ 0.0073\ 0.2488\ 1.6460\ 2.2311\ 0.6335\ 0.0379\ 0.0005\ 0] \times 10^6$$

其中 $A_{12} = -0.0107$ A_{21} 为八阶单位矩阵

$$A_{11} = -[0.0005\ 0.0376\ 0.6294\ 2.2249\ 1.6522\ 0.2529\ 0.0076\ 0] \times 10^6$$

沉降预测结果见表1,从表1可以看出本文预测方法比GM(1,1)模型、灰色 Verhulst 模型以及残差 GM 模型要好。

表1 沉降预测结果

Table 1 Predicted settlement obtained from different models

预测 时间/d	实测值 /mm	GM(1,1) 模型		灰色 Verhulst 模型		残差 GM 模型		本文方法	
		预测值/mm	相对误差	预测值/mm	相对误差	预测值/mm	相对误差	预测值/mm	相对误差
30	12.88	13.35	3.6	13.31	3.3	13.17	2.7	13.08	1.5
60	13.57	14.88	9.1	14.31	5.5	14.00	5.0	13.63	4.7
90	14.00	15.86	13.3	14.90	6.4	14.37	4.7	14.13	0.9
120	14.24	16.63	16.8	15.23	7.0	15.12	5.8	14.57	2.3
150	14.52	17.20	18.5	15.42	6.2	15.23	4.5	14.98	3.2

2008年12月江苏省政府通过了《江苏沿海滩涂围垦开发规划》,2009年6月国务院批准了《江苏沿海开发战略规划》,到2020年形成新围垦面积1804.77 km²,新筑围海围堤675.28 km,促淤导堤总长177.05 km。模袋砂围堤类似于模袋围堰,具有用土量少、抗冲刷能力强、施工工艺简单、造价低廉等特点。其基本原理是采用水力吹填的方法将砂水混合物灌入模袋中,砂料在模袋中泌水固结后形成较为密实的填筑体,与模袋组合构筑成定型的围堤。

江苏沿海采用模袋砂进行一次围垦266 km²,规模巨大,近期条子泥垦区266 km²围垦,世界无先例,许多关键工程技术问题突出。目前在弶港进行模袋砂滩涂围垦试验就是依托“十二五”国家科技支撑计划项目《沿海滩涂大规模围垦及保护关键技术研究》,其每10 d沉降测试数据 $\bar{x}_0 = [2.78\ 2.61\ 2.45\ 2.33\ 2.19\ 1.98\ 1.76\ 1.61\ 1.48\ 1.20]$ (单位:cm)。根据本文方法,式(14)中的调节因子取为18.86,然后通过MATLAB仿真模拟,取任意数 $\beta \in (0,1)$,求出 x_j ,构造以下函数:

$$I = \sum_{j=1}^{10} (x_{0j} - x_j)^2 \quad (18)$$

不断变动分数阶阶次 β ,使得式(18)结果最小,以确定最佳拟合效果,最终确定阶次 β 为0.2327,对30 d、60 d、90 d、120 d、150 d预测结果分别为25.6248 cm、26.1300 cm、26.5566 cm、26.9290 cm、27.2623 cm,比较结果如图1所示。

由图1可以看出,本文方法的预测值更精确。并进一步预测10 a后的沉降为37.50 cm,20 a后的沉降为41.04 cm,这符合通常堤坝、路基实际情况。

4 结 语

整数阶微积分仅仅是分数阶微积分的特例,即所有含整数阶微积分的模型全部可以采用分数阶微积分代替,分数阶模型能够更好地反映实际情况。本文以灰色模型为对象,将其推广至分数阶模型,提出了分数阶阶次确定方法及调节因子的概念,从仿真结果来看,不仅具有灰色模型前期预测效果好的特点,而且具有灰色 Verhulst 模型后期预测效果好的特点,并且预测精度得到提高。此外,还具有长期预测结果稳定的

特点。

但本文方法还存在一些缺陷:(a)计算过程复杂;(b)分数阶阶次和调节因子的确定需要不断观测仿真结果,比较麻烦。这2个缺陷也是笔者下一步需要解决的问题。

参考文献:

- [1] 陈善雄, 王星运, 许锡昌, 等. 路基沉降预测的三点修正指数曲线法[J]. 岩土力学, 2011, 32(11): 3355-3361. (CHEN Shanxiong, WANG Xingyun, XU Xichang, et al. Three-point modified exponential curve method for predicting subgrade settlements[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(11): 3355-3361. (in Chinese))
- [2] 秦植海, 秦鹏. 海堤地基固结系数反演与工后沉降分形模型预测[J]. 岩土力学, 2012, 33(6): 1747-1754. (QIN Zhihai, QIN peng. Consolidation coefficient inversion of seawall foundation and prediction of its post construction settlement based on fractal theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, 33(6): 1747-1754. (in Chinese))
- [3] 王清, 桑伟锋, 徐黎明, 等. 基于室内模拟实验的软土固结沉降的分形几何[J]. 吉林大学学报(地球科学版), 2011, 41(2): 465-470. (WANG Qing, SANG Weifeng, XU Liming, et al. Fractal geometry of consolidation settlement of soft soil based on simulation experiment[J]. Journal of Jilin University(Earth Science Edition), 2011, 41(2): 465-470. (in Chinese))
- [4] 冷伍明, 杨奇, 聂如松, 等. 高速铁路桥梁桩基工后沉降组合预测研究[J]. 岩土力学, 2011, 32(11): 3341-3349. (LENG Wuming, YANG Qi, NIE Rusong, et al. Study of post-construction settlement combination forecast method of high-speed railway bridge pile foundation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(11): 3341-3349. (in Chinese))
- [5] 刘寒冰, 向一鸣, 阮有兴. 背景值优化的多变量灰色模型在路基沉降预测中的应用[J]. 岩土力学, 2013, 34(1): 173-182. (LIU Hanbing, XIANG Yiming, RUAN Youxing. A multivariable grey model based on background value optimization and its application to subgrade settlement prediction[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(1): 173-182. (in Chinese))
- [6] 程健. 软土地基路堤工后沉降时参反演与预测[D]. 杭州, 浙江大学, 2005.
- [7] 高庆丰. 软土地基路堤工后沉降计算与预测[D]. 杭州, 浙江大学, 2003.
- [8] 王高峰, 孙秀娟, 孙向东, 等. 动态多变量灰色模型在危岩变形预测中的应用[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2014, 42(6): 508-512. (WANG Gaofeng, SUN Xiujuan, SUN Xiangdong, et al. Application of dynamic multi-variable grey model to predication of deformation of unstable rock[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences), 2014, 42(6): 508-512. (in Chinese))
- [9] 肖佐城, 王泽根. 灰色模型在建筑沉降预测中的改进与发展[J]. 路基工程, 2013(6): 58-62. (XIAO Zuocheng, WANG Zegen. Improvement and development of gray model in settlement prediction for buildings[J]. Subgrade Engineering, 2013(6): 58-62. (in Chinese))
- [10] 王高峰, 王洪德, 薛星桥, 等. 巫山县望霞危岩体破坏及再次变形失稳预测分析[J]. 自然灾害学报, 2012, 21(6): 164-172. (WANG Gaofeng, WANG Hongde, XUE Xingqiao, et al. Failure analysis of Wangxia dangerous rock mass in Wushan County and prediction its next deform and instability[J]. Journal of Natural Disasters, 2012, 21(6): 164-172. (in Chinese))
- [11] 沈毅, 郭金运, 周俊, 等. 基于灰色模型及其改进模型的土石坝沉降预测[J]. 山东理工大学学报(自然科学版), 2014, 28(1): 6-9. (SHEN Yi, GUO Jinyun, ZHOU Jun, et al. Subsidence prediction of earth and rockfill dam based on gray model and its improved models[J]. Journal of Shandong University of Technology(Natural Science Edition), 2014, 28(1): 6-9. (in Chinese))
- [12] 杨华龙, 刘金霞, 郑斌. 灰色预测 GM(1,1)模型的改进及应用[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(23): 39-46. (YANG Hualong, LIU Jinxia, ZHENG Bin. Improvement and application of grey prediction GM(1,1) model[J]. Mathematics In Practice and Theory, 2011, 41(23): 39-46. (in Chinese))
- [13] 程晨. 基于分数阶导数的软土流体力学性质研究[D]. 南京: 河海大学, 2012.
- [14] 梁舒. 分数阶系统的控制理论研究[D]. 安徽: 中国科学技术大学, 2015.
- [15] 秦文权. 客运专线复合地基上无碴轨道路基沉降的控制与计算分析研究[D]. 长沙: 中南大学, 2008.

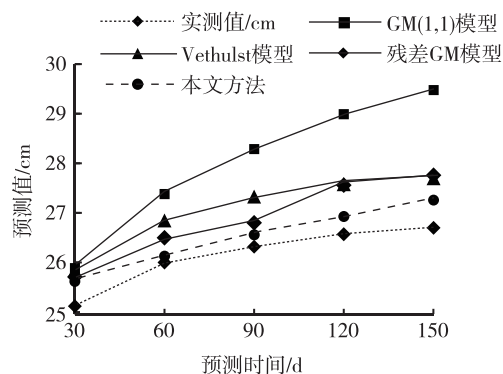


图1 沉降预测结果

Fig. 1 Predicted settlement values obtained from different models