

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2016.06.012

上荆江沙市河段河床横断面形态的调整规律

余 蕾^{1,2}, 王加虎¹, 邹志科¹, 卢金友², 李凌云²

(1. 河海大学水文水资源学院, 江苏 南京 210098; 2. 水利部江湖治理与防洪重点实验室, 湖北 武汉 430010)

摘要: 为研究冲积河流河床形态对水沙条件的响应调整规律, 基于河床演变的滞后响应原理, 对上荆江沙市河段河床横断面形态的调整过程进行研究。运用 Morlet 小波方法分析了沙市河段 1956—2011 年水沙序列的多时间尺度规律, 采用滑动平均法拟合了流量、含沙量与断面面积的单—幂指数函数关系。结果表明, 上荆江沙市河段河床横断面形态对水沙条件的响应存在滞后性, 其河床形态的调整受到包括当前时段在内的前期水沙条件的共同影响。建立了水沙序列分时段的面面积计算模型, 模拟结果显示, 河床横断面面积的变化情况与实际情况较接近, 断面面积计算值与实测值的相关系数 $R^2=0.85$, 模拟精度较好, 分时段计算模型可以较好地模拟上荆江沙市河段河床横断面形态的调整规律。

关键词: 冲积河流; 河床演变; 小波分析; 多时间尺度; 滞后响应; 断面面积; 上荆江沙市河段

中图分类号: TV147 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1980(2016)06-0544-06

Adjustment regularity of cross-sectional morphology of Shashi segment of upper Jingjiang Reach

YU Lei^{1,2}, WANG Jiahu¹, ZOU Zhike¹, LU Jinyou², LI Lingyun²

(1. School of Hydrology and Water Resources, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Key Laboratory of River Regulation and Flood Control of Ministry of Water Resources, Yangtze River Scientific Research Institute, Wuhan 430010, China)

Abstract: In order to study the dynamic response of riverbed morphology of alluvial rivers to water and sediment conditions, the adjustment process of riverbed cross-sectional morphology at the Shashi segment of the upper Jingjiang Reach was investigated based on the delayed response principle of riverbed evolution. The multi-time scale rules of water and sediment series of the Shashi segment during the period from 1956 to 2011 were analyzed using the Morlet wavelet method, and a power-exponent relationship between the discharge, sediment load, and cross-sectional area was obtained with the moving average method. The results show that the adjustment of riverbed cross-sectional morphology of the Shashi segment is delayed with the change of water and sediment conditions and it is influenced by previous and present water and sediment conditions. The model for calculation of the cross-sectional area for water and sediment series in different time periods is established. The simulated results indicate that the simulated cross-sectional areas and actual values are in good agreement and their correlation coefficient R^2 is 0.85, indicating that the established model can simulate the adjustment regularity of riverbed cross-sectional morphology of the Shashi segment of upper Jingjiang Reach.

Key words: alluvial river; river evolution; wavelet analysis; multi-time scale; delayed response; cross-sectional area; Shashi segment of upper Jingjiang Reach

冲积河流是一个与外界环境不断进行物质交换和能量输入输出的开放系统, 其平衡状态表明着输入条

收稿日期: 2015-09-29

基金项目: 国家自然科学基金(41271042, 51339001); 国家自然科学基金青年基金(51209015)

作者简介: 余蕾(1990—), 女, 湖北黄冈人, 硕士研究生, 主要从事水利工程研究。E-mail: 1032602833@qq.com

通信作者: 王加虎, 副教授。E-mail: tigerlly@126.com

件和系统自身相适应。河床在扰动情况下会自动进行冲淤调整,建立与水沙条件或河床边界条件相适应的均衡状态。水沙条件是塑造冲积河流河床形态的主要动力,水沙条件的变化将会导致河床形态的调整,不平衡输沙是河床演变的实质^[1]。

大量研究表明,河床形态的调整受当年和前期水沙条件的影响。Leopold 等^[2]以冲积河流为对象,从开放系统角度分析,认为河流系统外部变量变化后,其内部变量会进行自动调整以适应外部变量的变化,但其响应调整过程与外部扰动条件之间存在一定的滞后性。梁志勇等^[3]基于“记忆效应”提出了断面形态特征值 B (河宽)、 H (水深)或宽深比与来水、来沙条件的关系,认为河床形态既受水沙条件的影响,又受到前期断面形态的影响,对于黄河,河床的特征变量与前期 3~5 a 的水沙因子相关性最好。Surian 等^[4]根据大量的实测资料分析得出,从时间尺度来讲,大部分河床再造过程可以总结为非线性指数衰减函数的调整模式,也就是说,河流在受到扰动因素驱动后的最初一段时间河床再造的速度很快,河床迅速向新的动态平衡状态靠近,随着时间的推移,其靠近的速度越来越慢。基于这一理论,吴保生^[5-6]提出了冲积河流河床演变的调整模式:

$$\frac{dy}{dt} = \beta(y_e - y) \quad (1)$$

式中: y ——特征变量; y_e ——特征变量的相对平衡值,一般与外部变量相关; t ——时间; β ——特征变量的调整速率,可根据实测资料率定。

对式(1)进行积分求解得

$$y = (1 - e^{-\beta t})y_e + e^{-\beta t}y_{e0} \quad (2)$$

式中: y_{e0} —— $t=0$ 时刻的平衡值。

张艳艳等^[7]利用小波分析法建立了黄河平滩流量与水沙条件的多时间尺度关系,并计算出平滩流量滞后于水沙的时间。其结果与吴保生^[5]得到的滞后时间基本一致。

上述方法考虑了前期一定时期内的水沙条件对当前河床形态调整的作用,建立的河床演变调整模式能够很好地描述冲积河流特征变量对来水、来沙条件变化的响应调整规律^[8],但是仅适用于黄河流域。廖治棋^[9]改进了滞后响应模型的结构和参数,并将此运用到长江中游的荆江河段,初步揭示了长江流域也存在滞后响应现象。上述研究中水沙作用时间 t 均取 1a。长江中下游冲积河段的河床形态比黄河流域冲积河段稳定,河床横断面变化相对较小,逐年模拟存在一定的困难,故本文采用分时段模拟河床横断面形态在某一时段内水沙变化条件作用下的调整过程。

河床演变是一个宏观过程,笔者基于吴保生^[6]提出的滞后响应模型,运用小波分析方法^[10]对上荆江沙市河段水沙序列进行多时间尺度分析,并利用水沙时间序列的周期变化规律对水沙条件序列进行时段划分,建立适用于上荆江沙市河段断面面积的分时段变化调整模型,模拟上荆江沙市河段河床横断面形态的调整规律。

1 沙市水文站水沙的多时间尺度规律

水文序列多时间尺度分析的方法有滤波、滑动平均法、Fourier 分析等,但是这些方法都存在一定的缺陷^[11],小波分析是在 Fourier 分析基础上发展起来的一种具有时-频多分辨功能的数学方法,它能清晰地揭示隐藏在时间序列中的多种变化周期,弥补 Fourier 分析的不足^[10-11]。目前,小波分析在各个领域的应用手段已经成熟^[12-14]。本文选取沙市水文站(以下简称沙市站)1956—2011 年实测流量、含沙量资料,利用小波方法分析上荆江沙市河段水沙序列的多时间尺度规律。

1.1 小波分析方法

小波分析是一种信号的时间频率分析方法。小波函数 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$,震荡性、能够迅速衰减到零的特点使得小波函数有多种,本文采用 Morlet 连续复小波变化来分析水沙的多时间尺度^[15]。

时间序列 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$,其连续小波变换为

$$W_{f(a,b)} = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{R}} f(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-a}{b}\right) dt \quad (3)$$

式中: $W_{f(a,b)}$ ——小波变换系数; a ——尺度因子; b ——时间因子; $\bar{\psi}\left(\frac{t-a}{b}\right)$ —— $\psi\left(\frac{t-a}{b}\right)$ 的复共轭函数。

对于给定的 Morlet 子小波函数:

$$\psi_{a,b}(t) = e - 0.5t^2 e^{i\omega_0 t} \quad (4)$$

式中: ω_0 ——常数, $\omega_0 = 6.2$ 时周期 T 可近似地等同于时间尺度 a 。

将小波系数的平方值在 b 域上积分,就可得到小波方差,即

$$\text{Var}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} |W_{f(a,b)}|^2 db \quad (5)$$

1.2 沙市站水沙的小波特征

将沙市站 1956—2011 年的年平均流量、年平均含沙量资料进行标准化处理后^[16],进行小波变换(式(3)),计算出 Morlet 小波变换系数的实部。图 1(a)、图 1(b)分别为流量、含沙量小波系数时频分布图。

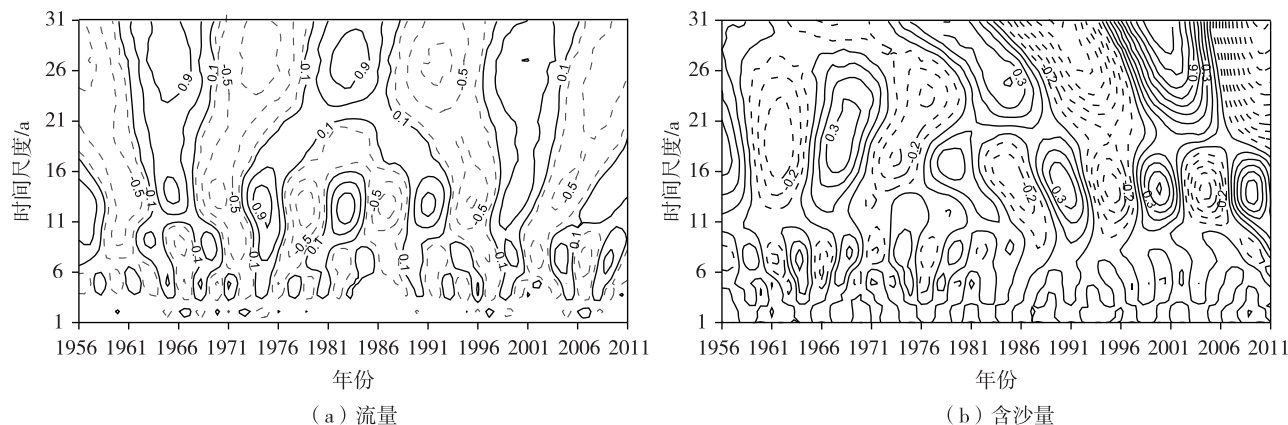


图1 沙市站流量、含沙量小波系数实部时频分布

Fig. 1 Time-frequency distribution of real part of wavelet coefficient for discharge and sediment concentration at Shashi Station

从图 1(a)可以看出流量存在明显的年际变化,存在 3~6 a、6~11 a、11~21 a、21~32 a 等尺度,其中 21~32 a 尺度最为突出,出现由枯到丰 6 次循环变化,其中心尺度在 28 a 左右;在 11~21 a 尺度上,出现了由枯到丰的 12 次循环交替,中心尺度在 13 a 左右。6~11 a 尺度的周期变化出现了由丰到枯的 11 次循环交替;3~6 a 尺度出现更多的循环。

由图 1(b)可知含沙量存在明显的年际变化和代际变化,存在 3~6 a、6~10 a、10~19 a、19~32 a 共 4 类尺度的周期变化规律。从较大尺度 19~32 a 分析,含沙量经历了由高到低 8 个循环变化。在 10~19 a 尺度上,含沙量经历了由高到低 11 个循环交替,中心尺度在 15 a 左右。6~10 a 出现更多正负相位循环交替,中心尺度在 8 a 左右;3~6 a 则出现更多循环。

计算沙市站年平均流量及年平均含沙量的小波方差,以时间尺度为横轴,以小波方差为纵轴,即可绘制小波方差图。它可用来确定信号中不同种尺度扰动的相对强度和存在的主要时间尺度,即主周期。年平均流量的小波方差图中存在 4 个明显的峰值(图 2),依次对应着 28 a、13 a、7 a、4 a 的时间尺度。其中,28 a、13 a 为主要周期。

含沙量的小波方差图中存在 3 个明显的峰值(图 2),依次对应着 8 a、15 a、32 a,由于 32 a 的数据超出本文的研究范围,大于 32 a 的周期有待进一步证实,所以 15 a、8 a 为主要周期。流量、含沙量的主要周期和次要周期共同决定着上荆江沙市河段的河床演变规律。河床形态的主要驱动力是上游的来水来沙条件,水沙条件一旦发生改变,河床会立即做出调整。

2 上荆江沙市河段河床调整过程模拟

由于上荆江沙市河段属于弯曲河道,北岸修建大堤,河道形态的变化受到护坡的束缚,主槽和滩地的界限不明显,给平滩水位的确定增加了一定困难。采用汛后断面面积来反映河床形态的调整过程,以汛后(11月至次年4月)多年平均水位 32.4 m 下的断面面积(施测日期

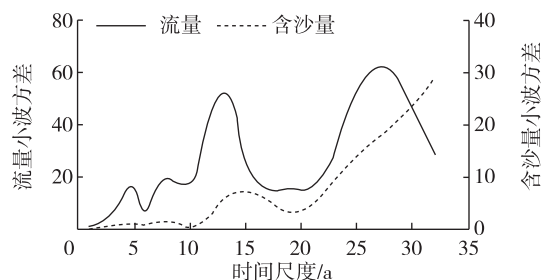


图2 沙市站流量及含沙量小波方差

Fig. 2 Wavelet variance of discharge and sediment concentration at Shashi Station

一般为每年11—12月)作为模型的特征变量,建立分时段模型,模拟沙市横断面形态的规律。

2.1 断面面积对水沙条件的响应

采用滑动平均法研究断面面积与水沙条件的响应关系^[17]。断面面积与当年($n=0$)汛期平均流量、6 a($n=6$)滑动平均汛期流量、当年汛期来沙系数、4 a($n=4$)滑动平均汛期来沙系数的关系如图3所示。

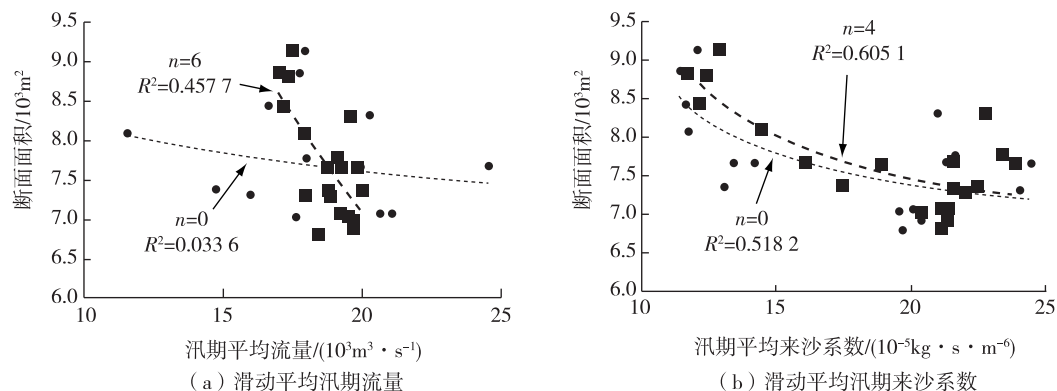


图3 沙市站断面面积与滑动平均汛期流量、滑动平均汛期来沙系数关系

Fig. 3 Relationship between cross-sectional area, average discharge, and average sediment load in flood season obtained from moving average method

断面面积与当年($n=0$)汛期平均水沙条件的关系较为紊乱,相比而言,当考虑前期水沙条件影响时,断面面积与前期的水沙条件相关度明显提高。其中,断面面积与 $n=6$ 的汛期平均流量之间的相关系数 $R^2=0.458$,与 $n=4$ 的汛期平均来沙系数之间的相关系数 $R^2=0.605$ 。

通过滑动平均法分析了沙市站横断面形态对汛期平均来水、来沙条件的响应,表明河段横断面形态的调整不仅受到当年水沙条件的影响,更与前期水沙条件相关,断面面积对水沙条件的响应存在滞后性。

2.2 分时段模拟

年平均流量、年平均含沙量是衡量河道来水、来沙条件平均状态的重要物理量。三峡工程虽对下游河道的水沙条件产生了一定的影响,而本文采用的是近60 a的水沙时间序列,主要时间尺度在一定时域范围内变化较小。因此依据沙市站年平均流量及年平均含沙量小波系数的变化规律,对水沙条件序列进行时段划分。主要周期体现了河床演变主要塑造力的规律,将年平均流量及年平均含沙量第一、第二主周期叠加^[7],如图4所示。

根据图4,依据叠加的周期过程线,水沙条件序列大致分为8段:1991—1992年、1992—1995年、1995—1999年、1999—2000年、2000—2003年、2003—2005年、2005—2009年、2009—2010年。主要周期下叠加的小波系数大致经历了由多至少或者由少至多的变化。

根据上述分段方法,每一时段中包括 n 年的水沙作用。长江流域“水多沙少”,且水沙存在“记忆效应”^[3],每个时段越靠近时段末,水沙作用越强^[18],其时段初($i=0$)水沙权重为 $1/(1+2+\dots+n)$,时段末($i=n-1$)水沙权重为 $n/(1+2+\dots+n)$,每一时段水沙权重为 $(i+1)/(1+2+\dots+n)$ 。每一时段的水沙作用可以通过水沙搭配来反映河床断面面积的调整。

对于冲积河流而言,河道形态由水沙条件决定,特定的水沙条件必然存在与之对应的断面面积平衡值。在现场勘测中,某一水位下断面面积平衡值很难准确观测到,因此从物理意义上由描述水沙条件的函数关系来表达。根据吴保生^[6]的研究,黄河下游的平滩变量平衡值为

$$Q_e = KQ_f^c \xi_f^d \quad (6)$$

式中: Q_f ——汛期平均流量; ξ_f ——汛期来沙系数,反映单位流量含沙量的大小; K 、 c 、 d ——系数和指数,根据实测资料率定。

结合上述特点,仍从物理意义上由描述水沙条件的函数关系来表达上荆江沙市河段断面面积的平衡值:

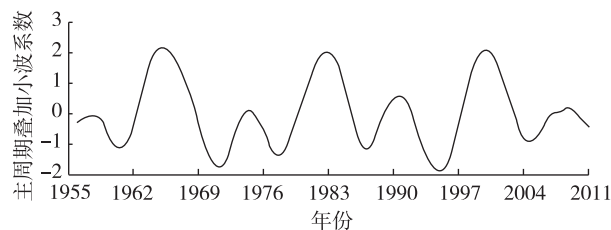


图4 沙市站主要周期下小波系数规律

Fig. 4 Wavelet coefficients at Shashi Station under different time scales

$$A_{ej} = K \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)Q_{fi}}{1+2+\dots+n} \right]^c \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)\xi_{fi}}{1+2+\dots+n} \right]^d \quad (7)$$

式中: A_{ej} ——第 $j(j=1,2,\dots,8)$ 时段末面积的平衡值; Q_{fi} ——第 j 时段中第 i 年汛期平均流量, m^3/s ; ξ_{fi} ——第 j 时段中第 i 年汛期平均来沙系数。

由此,沙市横断面的断面面积为

$$A_{bj} = (1 - e^{-\beta t}) K \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)Q_{fi}}{1+2+\dots+n} \right]^c \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)\xi_{fi}}{1+2+\dots+n} \right]^d + e^{-\beta t} A_{bj-1} \quad (8)$$

式中: A_{bj} ——第 j 时段经过 n 年水沙累计作用的断面面积,当 $j=1$ 时 A_{b0} 为初始年份汛中断面面积。

断面面积的变化需要一个时间过程进行调整,在前期水沙条件的综合作用下,河床通过自动调整将在一段时间后形成新的形态,这将作为当年水沙条件影响河床的初始河床条件。在第一时段的水沙作用($n=2$)下,断面面积由 A_{b0} 调整至 A_{b1} ,除第一时段初始面积的平衡值由初始年份 1991 年的汛中面积来确定,余下每一时段的初始面积平衡值均为上一时段末的断面面积 A_{bj-1} 。此时,若水沙条件继续发生变化,断面面积 A_{b1} 开始调整,经过多个时段($j=1,2,\dots,8$)调整之后,断面面积调整至 A_{bj} 。

2.3 模拟结果

根据建立的调整模型,利用上荆江沙市河段 1991—2010 年实测大断面资料和水沙资料,拟合相应的系数和指数分别为: $K=1279.2$, $c=0.049$, $b=-0.121$, $d=0.621$,可得适用于沙市站的断面面积计算公式:

$$A_{bj} = 1279.1(1 - e^{-0.621t}) \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)Q_{fi}}{1+2+\dots+n} \right]^{0.049} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)\xi_{fi}}{1+2+\dots+n} \right]^{-0.121} + e^{-0.621t} A_{bj-1} \quad (9)$$

由式(9)计算值与断面面积实测值进行比较,可得模型的计算精度指标——相关系数 R^2 。计算结果显示 $R^2=0.85$,可见计算值与实测值相关关系良好,计算精度较高。

图 5 给出了式(9)计算断面面积与实测值分时段变化情况,分时段模拟基本能够描述河床形态的调整过程。可以看出,上荆江沙市河段 1991—2010 年的断面面积整体上呈现先减少,再急剧增加,再缓慢增加的趋势。三峡工程开始蓄水后,模型依然能够进行模拟,且模拟的结果与实测值比较接近。2002 年以后,断面面积迅速增加,河床处于冲刷状态。

图 6 对断面面积计算值与实测值进行了对比,可以看到,当每一时段考虑前期 n 年内的水沙累计作用(其中 n 值根据小波分析来确定)时,模型的精度较高。

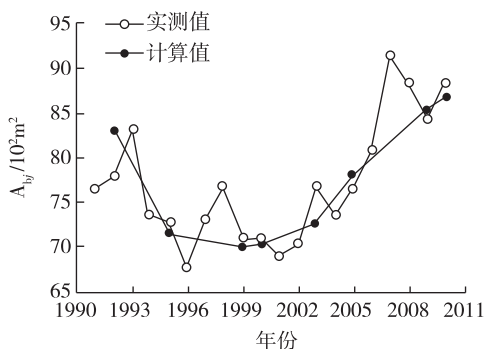


图 5 断面面积计算值与实测值逐时段模拟变化

Fig. 5 Change of simulated and measured cross-sectional areas in different time periods

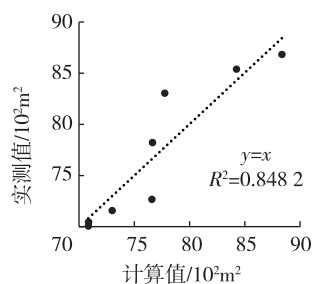


图 6 断面面积计算值与实测值关系

Fig. 6 Relationship between calculated and measured cross-sectional areas

3 结 语

a. 上荆江沙市河段流量、含沙量序列具有多时间尺度的特征。沙市站的流量序列存在 4 a、7 a、13 a、28 a 的变化周期,其中 28 a、13 a 为主要周期;含沙量序列主要存在大于 32 a、8 a、15 a 变化周期,其中 15 a、8 a 为主要周期;主、次要周期共同决定着沙市站流量、含沙量的丰枯、高低多时间尺度规律。

b. 通过滑动平均法分析了沙市站横断面形态对汛期平均来水、来沙条件的响应,表明了河段横断面形

态的调整受包括当前时段在内的前期水沙条件的共同影响,断面面积对水沙条件的响应存在滞后性。

c. 滞后响应模型描述了冲积河流河床演变的普遍规律,但目前在黄河流域等多沙河流应用较多,而长江“水多沙少”,复杂的江湖关系导致河段的调整规律存在差异。本文在黄河流域河床演变滞后响应模型的基础上,以汛后多年平均水位 32.4 m 下的断面面积为特征变量,结合小波方法分析水沙时间序列的多时间尺度规律,首次尝试将水沙条件序列依据二者主周期叠加的小波系数进行分时段研究,建立了上荆江沙市河段断面面积对水沙条件的分时段计算模型。

d. 对建立的分时段模型的基本原理和计算方法进行了阐述,并将模型应用于上荆江沙市河段,根据计算值与实测值的相关系数 $R^2=0.85$,得出二者关系较为密切、模型精度较高的结论。对河床演变的响应调整模型而言,分时段模拟不失为一种新思路,本文暂时只考虑了水沙条件对河床横断面形态的作用,未考虑河床结构、泥沙组成及人类活动等因素的影响,后续将对分时段模拟进行更加全面、整体的研究。

参考文献:

- [1] 邵学军,王兴奎.河流动力学概论[M].北京:清华大学出版社,2005.
- [2] LEOPOLD L B, LANGBEIN W B. The concept of entropy in landscape evolution[M]. Washington: US Government Printing Office, 1962.
- [3] 梁志勇,杨丽丰,冯普林.黄河下游平滩河槽形态与水沙搭配之关系[J].水力发电学报,2005,24(6):68-71. (LIANG Zhiyong, YANG Lifeng, FENG Pulin. Relations of channel geometry to water and sediment rate for the lower Yellow River[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2005, 24(6): 68-71. (in Chinese))
- [4] SURIAN N, RINALDI M. Morphological response to river engineering and management in alluvial channels in Italy[J]. Geomorphology, 2003, 50(4):307-326.
- [5] 吴保生.冲积河流平滩流量的滞后响应模型[J].水利学报,2008,39(6):680-687. (WU Baosheng. Delayed response model for bankfull discharge of alluvial rivers[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2008, 39(6): 680-687. (in Chinese))
- [6] 吴保生.冲积河流河床演变的滞后响应模型:I模型建立[J].泥沙研究,2008(6):1-7. (WU Baosheng. Delayed response model for fluvial processes of alluvial rivers:I model development[J]. Journal of Sediment Research, 2008(6): 1-7. (in Chinese))
- [7] 张艳艳,钟德钰,吴保生.黄河平滩流量的多时间尺度现象[J].水科学进展,2012,23(3):302-309. (ZHANG Yanyan, ZHONG Deyu, WU Baosheng. Multi time scale phenomena of flat bank flow in the Yellow River[J]. Advances in Water Science, 2012, 23(3): 302-309. (in Chinese))
- [8] 吴保生.冲积河流河床演变的滞后响应模型:II模型应用[J].泥沙研究,2008(6):30-37. (WU Baosheng. Delayed response model for fluvial processes of alluvial rivers:II model applications. Journal of Sediment Research, 2008(6): 30-37. (in Chinese))
- [9] 廖治棋.荆江河段平滩面积对水沙条件变化的滞后响应研究[D].武汉:长江科学院,2014.
- [10] 王文圣,丁晶,向红莲.小波分析在水文学中的应用研究及展望[J].水科学进展,2002,13(4):515-520. (WANG Wen sheng, DING Jing, XIANG Honglian. Application and prospect of wavelet analysis in hydrology[J]. Advances in Water Science, 2002, 13(4): 515-520. (in Chinese))
- [11] BOGGESS A. A first course in wavelets with Fourier analyses[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009.
- [12] 丛沛桐,王瑞兰,李艳,等.黄河冰凌地电测试曲线小波分析及预警技术[J].水利水电科技进展,2008,28(1):62-65. (CONG Peitong, WANG Ruilan, LI Yan, et al. Wavelet analysis of geo-electric measurement curve for ice jam of Yellow River and early warning technique[J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2008, 28(1): 62-65. (in Chinese))
- [13] SANG Yanfang, WANG Dong, WU Jichun, et al. Human impacts on runoff regime of middle and lower Yellow River[J]. Water Science and Engineering, 2011, 4(1):36-45.
- [14] ZOU Chunxia, SHEN Xiangdong, LI Hongyun, et al. Wavelet analysis of spring climate characteristics in arid aeolian area of agro-pastoral ecotone in China[J]. Water Science and Engineering, 2012, 5(3):269-277.
- [15] 邓自旺,林振山,周晓兰.西安市近50年来气候变化多时间尺度分析[J].高原气象,1997,16(1):81-93. (DENG Zi wang, LIN Zhenshan, ZHOU Xiaolan. Multiple time scales analysis of Xi'an climate for last 50 years[J]. Plateau Meteorology, 1997, 16(1): 81-93. (in Chinese))
- [16] 倪夏梅,陈元芳,刘勇,等.基于小波分析的枯水径流多时间尺度分析[J].水电能源科学,2010,28(3):6-8. (NI Xiamei, CHEN Yuanfang, LIU Yong, et al. Multiple time scale analysis of the low water runoff based on wavelet analysis[J]. China Rural Water and Hydropower, 2010, 28(3): 6-8. (in Chinese))
- [17] 吴保生,夏军强,张原锋.黄河下游平滩流量对来水来沙变化的响应[J].水利学报,2007,38(7):886-892. (WU Baosheng, XIA Junqiang, ZHANG Yuanfeng. Response of bankfull discharge to variation of flow discharge and sediment load in lower reaches of Yellow River[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2007, 38(7): 886-892. (in Chinese))
- [18] 李凌云.黄河平滩流量的计算方法及应用研究[D].北京:清华大学,2010.