

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2018.05.007

基于分数阶对流扩散方程的悬沙垂向分布

贺莉¹, 陈东¹, 段光磊², 朱振慧^{1,3}, 张世彦¹, 刘萌^{1,3}

(1. 中国科学院地理科学与资源研究所, 北京 100101; 2. 长江水利委员会荆江水文与水资源调查局, 湖北 荆州 434002;
3. 中国科学院大学资源与环境学院, 北京 100049)

摘要: 为模拟荆江河段的悬移质含沙量在近底区域内异常偏高的分布特性, 对比分析了平衡态方程(Rouse 公式)、非平衡态方程(韩其为公式)和分数阶方程在描述荆江河段次饱和悬沙垂向分布的适用性。分析结果表明: 平衡态方程不能描述强次饱和态悬移质含沙量的垂向分布特性, 非平衡态方程在水深大部分区域应用较好但不适用于近底区域, 分数阶方程可以较好地描述强次饱和水体含沙量在全部水深区域包括近底层的异常变化, 但对公式中新出现的分数阶参数需合理取值。
关键词: 次饱和和输沙; 悬移质含沙量; 悬沙垂向分布; 近底含沙量; 分数阶方程
中图分类号: P333.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1980(2018)05-0418-07

Vertical distribution of suspended sediment based on the fractional advection-diffusion equation

HE Li¹, CHEN Dong¹, DUAN Guanglei², ZHU Zhenhui^{1,3}, ZHANG Shiyan¹, LIU Meng^{1,3}

(1. Key Laboratory of Water Cycle and Related Land Surface Processes, Institute of Geographic Sciences and Natural Resources Research, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, China;
2. Jingjiang Hydrology & Water Resources Surveying Bureau, Yangtze River Water Resources Commission, Jingzhou 434002, China;
3. College of Resources and Environment, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: In order to simulate the anomalous vertical profile of suspended sediment in the Jingjiang Reach, three equations, including the equilibrium equation by Rouse, the non-equilibrium equation by Han Qiwei and the fractional advection-diffusion equation, were adopted to describe the vertical distribution of unsaturated suspended sediment. The results showed that the equilibrium equation by Rouse can not describe the vertical distribution of sand content in the suspended sediment. Comparing the calculated data with the measured data, Han's Equation performed well in the upper part, but underestimated the value near the riverbed. The fractional advection-diffusion equation can give a good description of the vertical distribution of concentration in channel with unsaturated sediment regime, when the new fractional parameters have reasonable values.
Key words: unsaturated sediment transport; suspended sediment concentration; vertical distribution of suspended sediment; sand content near the riverbed; fractional equation

三峡工程运行前, 长江中游的荆江河段可被视为准平衡态河段^[1-2]。2003 年 6 月, 三峡大坝水库开始蓄水并拦截泥沙, 下游河段的水流经常处于强烈次饱和状态, 导致严重的河床冲刷及河岸侵蚀^[3]。近底加密模式(增加近底 2 个测点)观测到的荆江河段悬沙资料表明, 悬移质含沙量的垂向分布偏离正常状态, 近底区域含沙量显著增大。笔者基于分数阶对流扩散方程提出新的悬沙垂线分布公式, 以描述强次饱和河段悬沙的垂向分布, 并与平衡态经典公式(Rouse 公式^[4])和非平衡态典型公式(韩其为公式^[1])进行对比分析。

基金项目: 国家重点研发计划(2016YFC0402303); 国家自然科学基金(51579230, 51279192)
作者简介: 贺莉(1982—), 女, 助理研究员, 博士, 主要从事河流地貌研究。E-mail: heli@igsrr.ac.cn
引用本文: 贺莉, 陈东, 段光磊, 等. 基于分数阶对流扩散方程的悬沙垂向分布[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2018, 46(5): 418-424.
HE Li, CHEN Dong, DUAN Guanglei, et al. Vertical distribution of suspended sediment based on the fractional advection-diffusion equation[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences), 2018, 46(5): 418-424.

1 问题提出

荆江河段的悬沙垂向分布呈现明显的近底拖尾现象,首先分别采用平衡态和非平衡态的泥沙垂向分布公式描述该拖尾现象。平衡态的泥沙垂向分布公式选择经典的 Rouse 公式^[4],非平衡态的泥沙垂向分布公式选择韩其为院士的非平衡公式^[1]。

对流扩散方程(ADE)的表达式为

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \omega \frac{\partial S}{\partial y} + \varepsilon_{sy} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \tag{1}$$

式中: S ——悬沙质量浓度; ω ——悬沙颗粒在静止清水中的沉降速度; ε_{sy} ——悬沙竖向扩散系数。

当悬沙紊动扩散达到平衡态时,式(1)可转换为

$$\omega S + \varepsilon_{sy} \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

假定悬沙扩散系数 ε_{sy} 等于动量扩散系数 ε_m ($\varepsilon_{sy} = \varepsilon_m = \kappa u_* (1-y/h)y$),即得到平衡输沙的悬沙垂向分布 Rouse 公式:

$$\frac{S}{S_a} = \left(\frac{\frac{h}{y} - 1}{\frac{h}{a} - 1} \right)^{\frac{\omega}{\kappa u_*}} \tag{3}$$

式中: S_a ——距离床面给定位置的参考悬沙含沙量; h ——水深; a ——底部参考点高度; κ ——卡门常数; u_* ——剪切流速。

尽管 Rouse 公式已经被广泛应用了几十年,且许多学者对 Rouse 公式(式(3))进行了不同的修正和扩展^[5-9],但它仍存在一定的不足:(a)水面处悬沙浓度的计算值为零,床面的含沙量为无穷大^[10];(b)公式是在泥沙输移为平衡态的前提下推导得到^[11],这个假定导致 Rouse 公式在非平衡河段(如荆江段)不适用。因此,近年来学者们进行了更广泛的悬沙垂向分布研究^[12-15]。其中,韩其为等^[1]将方程(2)拓展到可以描述非平衡态的悬沙运动方程:

$$\omega S + \varepsilon_{sy} \frac{\partial S}{\partial y} = q_s \tag{4}$$

式中: q_s ——冲淤量。

韩其为等得到非平衡态下的悬沙垂向分布公式:

$$\frac{S}{S_a} = \left(\frac{\frac{h}{y} - 1}{\frac{h}{a} - 1} \right)^{\frac{c_0 \omega}{\kappa u_*}} \tag{5}$$

其中

$$c_0 = 1 - f\left(\frac{\bar{S}}{S_*}\right)$$

式中: c_0 ——非饱和系数; $\bar{S}$ ——平均含沙量; S_* ——挟沙能力。

若 $\frac{\bar{S}}{S_*} = 1, c_0 = 1$;若 $\frac{\bar{S}}{S_*} < 1, c_0 > 1$,表示水流处于泥沙次饱和状态;若 $\frac{\bar{S}}{S_*} > 1, c_0 < 1$,表示水流处于超饱和状态。

图 1 给出了荆江河段的实测悬沙垂向分布及式(3)、式(5)的计算结果,图中 d_{50} 为悬沙的中值粒径, z/h 为相对高度。根据 c_0 值的不同,分别选取 3 种不同水流含沙状态下的悬沙垂向分布,包括准平衡态($c_0 \approx 1$)、次饱和($c_0 > 1$)和超饱和($c_0 < 1$)。从图 1 可知,Rouse 公式用于描述次饱和河段的悬沙浓度存在一定局限性;相比于 Rouse 公式,韩其为公式在垂线上半部分拟合较好,但是仍然低估了近床面水流的含沙量,即在相对高度为 $0.1h$ 范围内的实测值要远远高于计算值。本文主要目的在于分析次饱和输沙情况下悬沙垂线分布的拟合验证,因此以下分析主要针对 $c_0 > 1$ 的实测垂线含沙量。

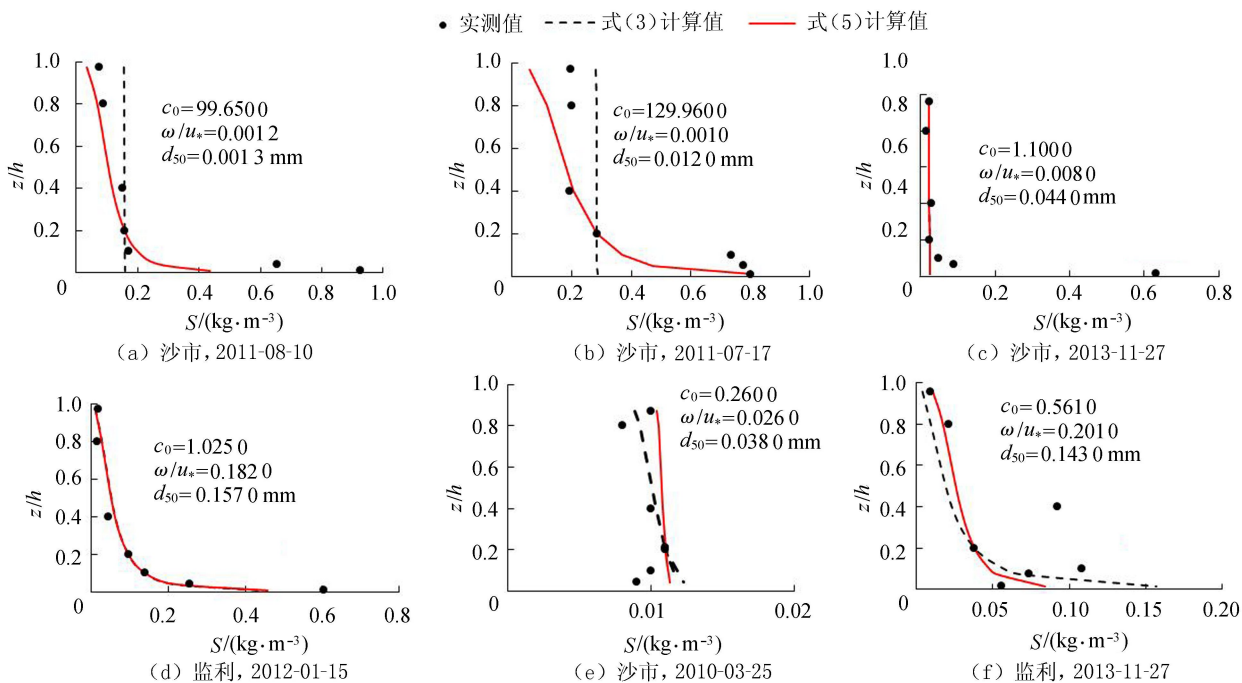


图1 悬沙质量浓度的垂向分布

Fig.1 Vertical distributions of suspended sediment concentration

2 分数阶含沙量垂线分布公式推导

分数阶对流-扩散方程(fADE)也被用于描述紊动促发导致的悬沙跳跃的远距离特征^[4]。由于分数阶导数可以描述幂律分布,因此采用分数阶模型描述平衡态下的悬沙分布:

$$\omega S + \bar{\varepsilon}_{sy} \frac{\partial^\alpha S}{\partial y^\alpha} = 0 \tag{6}$$

式中: α ——分数阶参数($0<\alpha\leq1$);考虑到非正常颗粒运动区域为整个垂向水域,使用水深平均的 $\bar{\varepsilon}_{sy}$ 来代替 ε_{sy} 。将 ε_{sy} 在相对高度为 $(0.01\sim1.0)h$ 的水深范围内进行积分,可得

$$\bar{\varepsilon}_{sy} = \frac{\int_{0.01h}^h \kappa u_* \left(1 - \frac{y}{h}\right) y dy}{0.99h} = 0.175 \kappa u_* h \tag{7}$$

对于非平衡态下的悬沙运动,式(6)为

$$\omega S + \bar{\varepsilon}_{sy} \frac{\partial^\alpha S}{\partial y^\alpha} = q_s \tag{8}$$

假设

$$q_s = c(S - S_*) \tag{9}$$

式中: c ——非平衡系数。

若 $S=S_*, q_s=0$,表示水流挟沙力等于含沙量;若 $S<S_*, q_s<0$,表示水流含沙为次饱和状态;若 $S>S_*, q_s>0$,表示水流含沙为超饱和状态。

由于研究河段的水流为次饱和状态,将式(9)简化为

$$q_s = -cS \tag{10}$$

式(10)中 $c>0$,是 $(S-S_*)$ 的函数,将式(10)代入式(8)得解析解^[4]:

$$\frac{S}{S_a} = E_\alpha \left[-\frac{\omega + c}{\bar{\varepsilon}_{sy}} (y - a)^\alpha \right] \tag{11}$$

式中: $E_\alpha(*)$ ——Mittag-Leffler 函数,可以通过级数展开求解。在实际计算中采用 Matlab 软件进行求解。

3 实测资料验证分析

3.1 资料来源

资料来源于长江水利委员会水文局荆江水文水资源勘测局,主要是荆江段 2 个水文站点(沙市和监利)的水流流速、悬移质含沙量以及相应的泥沙级配数据,包括断面、垂线和测点的数据。水文站点距离三峡出口(宜昌)的距离分别为 143 km 和 310 km,具体位置见图 2。

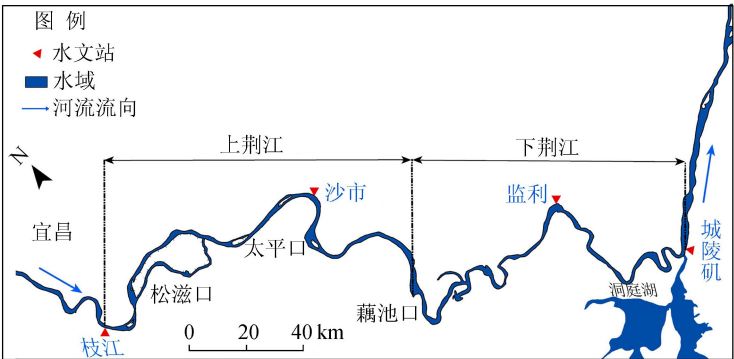


图 2 荆江段水文站点的地理位置

Fig.2 Map of the Jingjiang River reach and important hydrology stations

荆江水文水资源勘测局在 2010 年开展了荆江河段近底区域的垂线含沙量测量。在 2010 年之前的垂向含沙量测量中,垂线上为 5 个测点(相对高度 1.0h、0.8h、0.4h、0.2h 和 0.1h),对于 10% 水深内的近底区域没有观测。在 2010 年的测量中垂向加密为 7 点(相对高度 1.0h、0.8h、0.4h、0.2h、0.1h 和分别距离床面 0.5 m 和 0.1 m 的两点)。两站的平均垂向水深范围为 12.2 ~ 13.7 m,测量垂向的最小水深为 2.09 m(沙市站 2010 年 3 月 25 日测量,距离左岸的起点距为 1 100 m),因此悬沙浓度的垂向分布尤其是近底区域得到了更加细致的测量。收集了沙市站 1996 年、1998 年、2010 年、2011 年、2012 年、2013 年的部分实测资料,共计 130 组悬沙浓度分布;监利站 1986 年、1998 年、2002 年、2010 年、2011 年、2012 年、2013 年共 180 组悬沙浓度分布。

图 3 为三峡建坝前后荆江河段含沙量的垂向分布对比。7 点法测量结果表明,悬沙浓度分布通常在近床面区域(相对高度为 0.1h)拖有长长的“尾巴”,使用 5 点法测量则无法体现该特点。

□ 7点法测量结果 × 5点法测量结果 — 乘幂拟合曲线(7点法) - - - 乘幂拟合曲线(5点法)

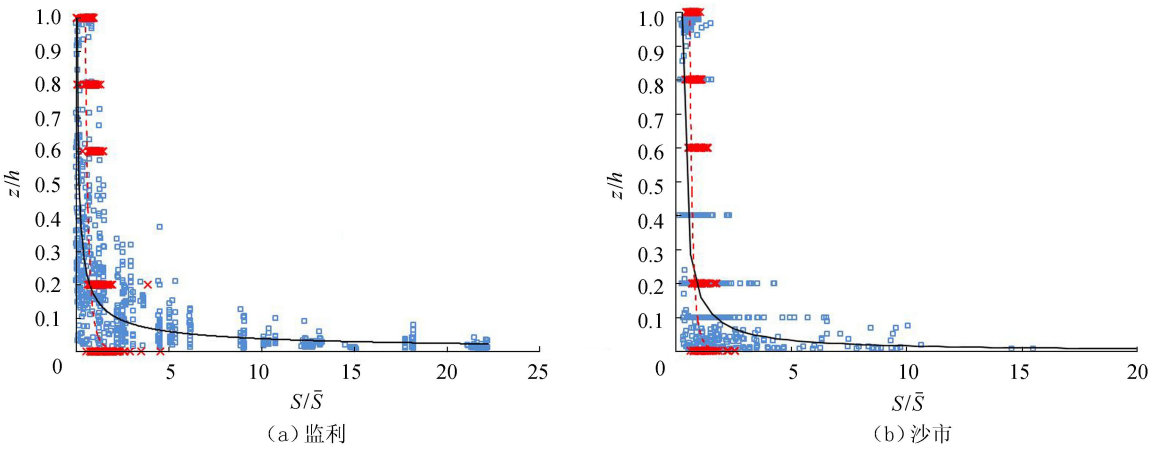


图 3 监利站和沙市站的悬沙垂向分布及断面平均值对比

Fig.3 Comparison of vertical concentration and sectional averaged concentration between the Jianli Hydrology station and the Shashi Hydrology station

从具有典型拖尾现象的悬沙垂向分布和垂向平均值的对比看(图 4),近底含沙量远大于垂线平均含沙量。当使用传统的悬沙输移公式预测这些非饱和态水流的泥沙通量时,若不对其进行修正,将会造成相应的

误差,比如使用 Rouse 公式来预测非饱和态水沙时的误差高达 40%。在接下来的分析中,首先剔除非次饱和输沙、明显不具备拖尾现象的垂线含沙量资料。

对收集到的悬沙垂向含沙量资料进行初步筛选,假定需要满足的条件包括:(a)非饱和系数 $c_0 > 1$; (b)近底两点的含沙量均大于断面平均含沙量 4 倍; (c)近底两点的含沙量大于垂线上其余各点含沙量(图 4)。满足上述 3 点要求的悬沙垂向分布,则认为该垂向平均含沙量为次饱和状态下且存在拖尾现象的悬沙垂向分布。经过仔细对比,共筛选出监利站 57 组、沙市站 33 组实测悬沙分布资料用于模拟分析,枝城站没有满足拖尾现象的垂向含沙量。

3.2 模拟结果

根据 90 组次资料对比了各垂向上悬沙浓度实测值和 Rouse 公式(式(3))、韩其为公式(式(5))、FADE(式(11))计算值。从模拟结果可以看出:Rouse 公式不能应用于非平衡河段的悬沙运动预测;韩其为公式在垂线上半部分拟合较好,但是仍然低估了近床面(相对高度 0.1h)水流的含沙量;分数阶模型可以描述次饱和和河段中的非平衡悬沙运动特征。限于篇幅,这里仅列出不同非饱和系数下典型垂向含沙量的对比(图 5)。

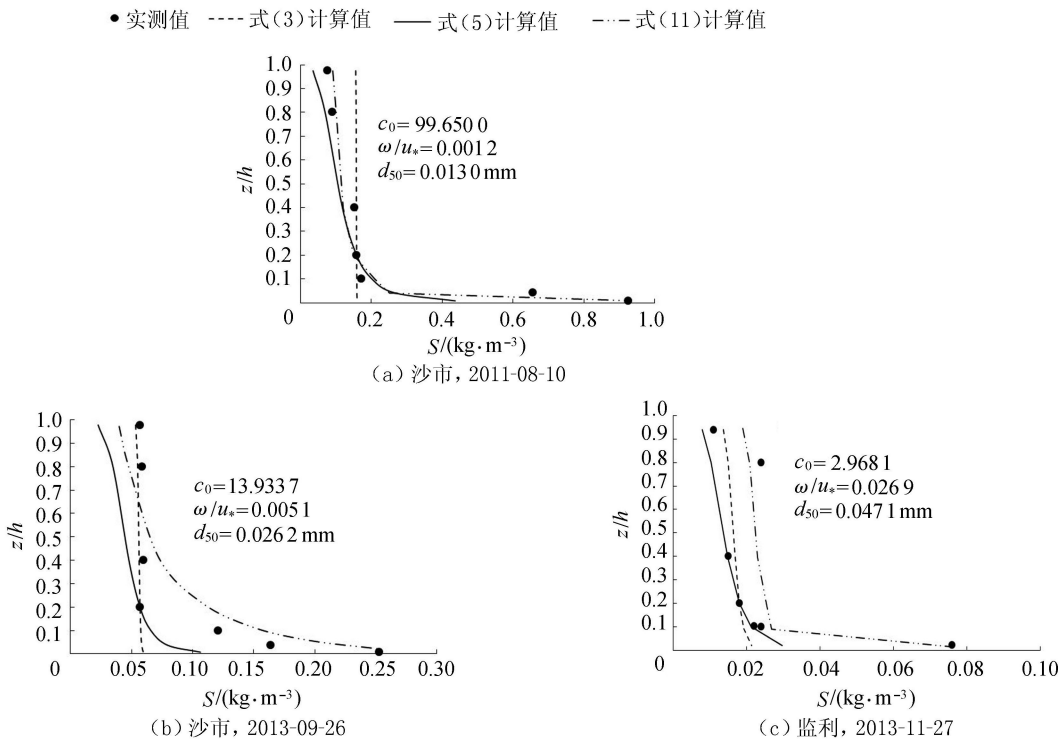


图 5 悬沙质量浓度实测值与计算值对比

Fig. 5 Comparison between measured and calculated vertical profiles of suspended sediment concentration

从实用角度上说,分数阶模型能更好地描述强次饱和和输沙下泥沙的垂向分布,尤其是严重拖尾部分的含沙量;从理论分析的角度说,泥沙的垂向扩散存在空间随机性,同时紊流理论表明涡流会将水流底部的泥沙颗粒携带至更高的水体中,泥沙颗粒的扩散具有更广的扩散范围^[16-17]。但是,分数阶方程公式中存在 2 个变量(c 和 α),变量的不同组合对模拟结果影响很大(图 6)。由图 6 可知, c 越大,悬沙浓度最小值和最大值

的差别越小; α 值越大,悬沙垂向分布的变化越平缓,近底区域含沙量突增的现象不明显。因此,模型的理论解释和参数的物理意义及其变化规律等均需要更深入的研究及更多资料的验证,如 Chen 等^[5]认为分数阶导数参数 α 随着颗粒粒径的减小而减小。

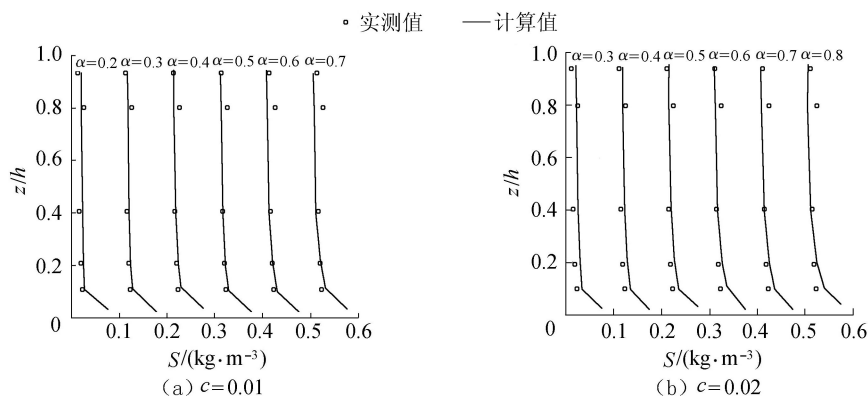


图 6 参数 c 和 α 对模拟结果的影响 (监利,2013-11-27, $d_{50}=0.0471\text{ mm}$)

Fig. 6 Influence of parameter c and α
(data measured at the Jianli hydrology station, 2013-11-27, $d_{50}=0.0471\text{ mm}$)

4 结 语

三峡工程的运行导致长江荆江河段由准平衡态转变为次饱和的非平衡态。基于荆江段沙市和监利水文站的垂向悬沙浓度实测资料,比较了不同悬沙垂线分布公式对实测悬沙浓度分布的适用性。结果表明,当缺乏近底观测数据而使用传统悬沙垂向分布公式预测这些非饱和态水流的泥沙通量时,若不对其进行修正,将会造成较大的误差。计算和实测资料的对比分析表明,对流扩散平衡态方程不能描述强次饱和态悬沙含沙量的垂向分布特性,非平衡态方程在水深大部分区域应用较好但不适用于近底区域,分数阶方程可以较好地描述强次饱和和水体含沙量在全部水深区域包括近底层的异常变化,但对公式中新出现的分数阶参数需合理取值。

参考文献:

[1] 韩其为,陈绪坚,薛晓春. 不平衡输沙含沙量垂线分布研究[J]. 水科学进展, 2010, 21(4): 512-523. (HAN Qiwei, CHEN Xujian, XUE Xiaochun. On the vertical distribution of sediment concentration in non-equilibrium transportation[J]. Advances in Water Science, 2010, 21(4): 512-523. (in Chinese))

[2] XIA Junqiang, ZONG Quanli, ZHANG Yi, et al. Prediction of recent bank retreat processes at typical sections in the Jingjiang Reach[J]. Science China Technological Sciences, 2014, 57(8): 1490-1499.

[3] 方春明,胡春宏,陈绪坚. 三峡水库运用对荆江三口分流及洞庭湖的影响[J]. 水利学报, 2014, 45(1): 36-41. (FANG Chunming, HU Chunhong, CHEN Xujian. Impacts of Three Georges Reservoir's operation on outflow of the three outlets of Jingjiang River and Dongting Lake[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2014, 45(1): 36-41. (in Chinese))

[4] ROUSE H. Experiments on the mechanics of sediment suspension[C]//John Wiley & Sons. Fifth International Congress for Applied Mechanics. New York: John Wiley & Sons,1939:550-554.

[5] CHEN Dong, SUN Hongguang, ZHANG Yong. Fractional dispersion equation for sediment suspension[J]. Journal of Hydrology, 2013, 491:13-22.

[6] McTIGUE D F. Mixture theory for suspended sediment transport[J]. Journal of the Hydraulics Division, 1981, 107(6): 659-673.

[7] BECHTELER W, FARBER K. Stochastic model of suspended solid dispersion[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1985, 111(1): 64-78.

[8] WRIGHT S, PARKER G. Flow resistance and suspended load in sand-bed rivers: simplified stratification model[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004, 130(8): 796-805.

[9] WILSON K C. Rapid increase in suspended load at high bed shear[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2005, 131(1): 46-51.

[10] 张瑞瑾, 谢鉴衡. 河流泥沙动力学[M]. 2 版. 北京: 中国水利水电出版社, 2008.

[11] HUANG Saihua, SUN Zhilin, XU Dan, et al. Vertical distribution of sediment concentration[J]. Journal of Zhejiang University Science A, 2008, 9(11): 1560-1566.

[12] JOBSON H E, SAYRE W W. Predicting concentration profiles in open channels[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1970, 96(10): 1983-1996.

[13] 赵连军, 吴国英, 王嘉仪. 不平衡输沙含沙量垂线分布理论研究展望[J]. 水力发电学报, 2015, 34(4): 63-69. (ZHAO Lianjun, WU Guoying, WANG Jiayi. Review and prospect of vertical distribution by non-equilibrium sediment concentration theory[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2015, 34(4): 63-69. (in Chinese))

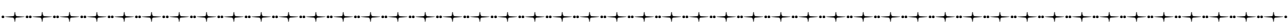
[14] 郑俊, 李瑞杰, 丰青, 等. 近岸悬沙质量浓度垂向分布公式[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2013, 41(5): 76-79. (ZHENG Jun, LI Ruijie, FENG Qing, et al. Formula of vertical distribution of nearshore suspended sediment concentration [J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences), 2013,41(5): 76-79. (in Chines))

[15] 莫磊, 李瑞杰, 李佳芮, 等. 悬移质泥沙的垂线分布[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2013, 41(1): 90-94. (MO Lei, LI Ruijie, LI Jiarui, et al. Research on vertical distribution of suspended sediment concentration [J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences), 2013,41(1): 90-94. (in Chines))

[16] BROWN G L. Approximate profile for nonequilibrium suspended sediment[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2008, 134(7): 1010-1014.

[17] NOGUCHI K, NEZU I. Particle-turbulence interaction and local particle concentration in sediment-laden open-channel flows [J]. Journal of Hydro-Environment Research, 2009, 3(2): 54-68.

(收稿日期:2017-09-27 编辑:刘晓艳)



• 简讯 •

第三届环境与能源工程国际会议将在青岛市召开

为了给学者、工程师以及来自世界各地的相关专业人士提供展示其在环境与能源工程领域的最新研究成果的平台,由山东大学、厦门理工大学、国际环境信息科学学会(ISEIS)和亚太科学与工程研究所(APISE)联合主办的第三届环境与能源工程国际会议(IC3E 2019)将于2019年4月25—27日在山东青岛市召开。

征文主题包括:生态与生物多样性保护、可再生能源、气候变化与全球变暖、可持续发展、遥感与环境、太阳能电力与光伏应用、风能、水电、潮汐和波浪等。会议论文将由 EiCompendex、SCOPUS、WOS、INSPEC 及其他学术数据库进行检索,并会评选出优秀论文刊发在国际期刊上。

会议官方网址:<http://www.ic3e.net/cfp.html>

(本刊编辑部供稿)