

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2018.05.011

基于分形模型的黏性沉积物侵蚀临界剪切应力及其验证

卢佩霞¹, 徐永福^{2,3}

(1. 扬州工业职业技术学院, 江苏 扬州 255127; 2. 上海交通大学土木工程系, 上海 200030;
3. 河海大学文天学院, 安徽 马鞍山 243000)

摘要: 为在黏性沉积物表面侵蚀模型中考虑团粒粒径分布的影响, 基于黏性沉积物团粒结构的分形模型, 建立黏性沉积物表面侵蚀的临界剪切应力与团粒粒径及有效密度的理论关系。结果表明: 黏性沉积物表面侵蚀的临界剪切应力是团粒粒径和有效密度的幂函数, 幂函数的指数是黏性沉积物团粒分维的函数; 与 Kranenburg 模型、Son 模型相比, 基于分形模型的临界剪切应力模型更加合理, 与试验数据更加接近。

关键词: 黏性沉积物; 表面侵蚀; 临界剪切应力; 团粒; 分形模型

中图分类号: TU47 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1980(2018)05-0445-06

Critical shear stress of surface erosion for the cohesive sediments based on the fractal model and its validation

LU Peixia¹, XU Yongfu^{2,3}

(1. Yangzhou Polytechnic Institute, Yangzhou 225127, China;
2. Department of Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China;
3. Wentian College of Hohai University, Maanshan 243000, China)

Abstract: Cohesive sediment is an important component of the aquatic environments, which must be monitored and managed for environment, engineering, and human health reasons. The stability of cohesive sediments in an aquatic environment dependent on the balance between hydrodynamic forces that cause erosion and the forces within the sediment that resist it. And the stability of cohesive sediments is described by the critical shear stress. At present, existing models for the critical shear stress of the surface erosion of cohesive sediments is lacking a consideration of the aggregate size distribution in cohesive sediments. This study constructed the fractal model of the cohesive aggregate structure in cohesive sediments. Meanwhile, the relationship is built for the critical shear stress as functions of the median diameter and excess density from the fractal model for cohesive aggregates. It can be found that the critical shear stress of cohesive sediments is a power function of the median diameter and excess density. The proposed relations from the fractal model for aggregates are validated by a bulk number of experimental data and a new method is proposed to determine the critical shear stress.

Key words: cohesive sediment; surface erosion; critical shear stress; aggregate; fractal model

流水在黏性沉积物表面的剪切应力超过团粒(Aggregate)间的联结力时, 沉积物表面团粒会被流水侵蚀、剥离^[1]。黏性团粒的侵蚀分为 3 种类型: 絮凝物侵蚀、表面侵蚀和块体侵蚀^[2]。其中, 表面侵蚀是在很小的流水剪切应力下发生的, 是一种排水破坏, 不产生超孔隙水压力^[3]。表面侵蚀发生的条件^[4-5]为流水侵

基金项目: 国家自然科学基金(41630633)

作者简介: 卢佩霞(1969—), 女, 教授, 博士, 主要从事分形介质力学、非饱和(特殊)土力学和地基处理研究。E-mail: lupeixia@sjtu.edu.cn

通信作者: 徐永福, 教授。E-mail: yongfuxu@sjtu.edu.cn

引用本文: 卢佩霞, 徐永福. 基于分形模型的黏性沉积物侵蚀临界剪切应力及其验证[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2018, 46(5): 445-450.

LU Peixia, XU Yongfu. Critical shear stress of surface erosion for the cohesive sediments based on the fractal model and its validation [J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences), 2018, 46(5): 445-450.

蚀剪切应力大于临界剪切应力 τ_c , 因此 τ_c 是研究黏性沉积物表面侵蚀的关键参数。目前, 针对 τ_c 的计算研究很多^[1, 6], 但已有的 τ_c 计算方法都是经验性的, 忽略了黏性沉积物表面侵蚀的物理过程, 缺少考虑沉积物自身特性的可靠 τ_c 计算方法^[5-6]。

在颗粒间的联结力和吸附力作用下, 黏性沉积物颗粒趋向于形成具有自相似结构的团粒^[5-8]。自相似结构具有尺度不变性^[9], 即侵蚀面上的胶结键与团粒的尺度无关。Kranenburg^[8] 假设 τ_c 与团粒尺寸无关, 推导了 τ_c 的计算公式。Son 等^[10] 假设 τ_c 与颗粒间的联结力和联结键数有关, 提出了 τ_c 的计算公式。Mills 等^[11]、Thomsen 等^[12] 给出的黏性沉积物 τ_c 的试验数据, 但数据与 Kranenburg^[8] 和 Son 等^[10] 公式的计算结果不符。因此, 全新的计算黏性沉积物 τ_c 的公式亟待提出。

笔者基于黏性沉积物团粒的分形模型, 建立黏性沉积物的临界剪切应力与团粒的平均粒径和有效密度的相关关系, 提出黏性沉积物 τ_c 的计算方法, 并采用大量的试验数据对 τ_c 的计算公式进行了验证。

1 黏性团粒的分形模型

黏性沉积物团粒的嵌套如图 1 所示, 黏性沉积物的基本颗粒在黏结力和吸附力作用下, 联结形成 1 级团粒; 1 级团粒在黏结力和吸附力作用下, 联结形成 2 级团粒; 以此类推, 联结形成 3 级团粒、4 级团粒等更高级团粒。假设各级团粒孔隙比不变, 由此得到颗粒数和粒径的关系^[6]:

$$N = \frac{c}{f_a \rho_p} \left(\frac{d_a}{d_p} \right)^D \tag{1}$$

式中: N ——基本颗粒的个数; c ——黏性团粒的质量浓度; f_a ——团粒的形状因子, 对于球状团粒, $f_a = \pi/6$; ρ_p ——基本颗粒的密度; d_p ——基本颗粒的粒径; d_a ——黏性团粒直径; D ——黏性团粒的分维。

简单起见, 假设黏性团粒为球状, 固体体积率定义为 $\varphi_s = (Nd_p^3)/d_a^3$, 将式(1)代入得

$$\varphi_s = \frac{c}{f_a \rho_p} \left(\frac{d_a}{d_p} \right)^{D-3} \tag{2}$$

黏性团粒的密度 ρ_a 是固体颗粒密度与水密度 ρ_w 的平均值 ($\rho_a = \varphi_s \rho_p + (1 - \varphi_s) \rho_w$), 黏性团粒的有效密度 ρ_e 为

$$\rho_e = \rho_a - \rho_w = \frac{c}{f_a \rho_p} \left(\frac{d_a}{d_p} \right)^{D-3} (\rho_p - \rho_w) \tag{3}$$

采用文献[13]的试验数据验证由黏性沉积物团粒分形模型导出的有效密度公式。文献[13]给出的 Mfolozi 河口不同沉积环境下形成沉积物 ρ_e 与 d_a 间的相关关系如图 2 所示, 图中 c 、 S 和 G 分别表示团粒的浓度、盐度和剪切速率。图 2 中斜线为式(3)的预测结果, 根据斜线的斜率, Mfolozi 河口沉积物团粒的分维为 1.68, 不受浓度、盐度和剪切速率影响, 表明团粒分维是团粒的固有特性只与黏性沉积物的基本粒子有关。不同学

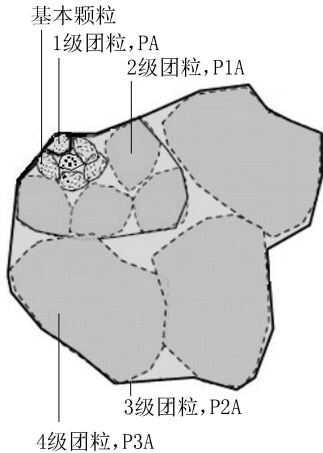


图 1 黏性团粒的自相似嵌套结构^[33]
Fig. 1 Self-similar nested structure of cohesive aggregates

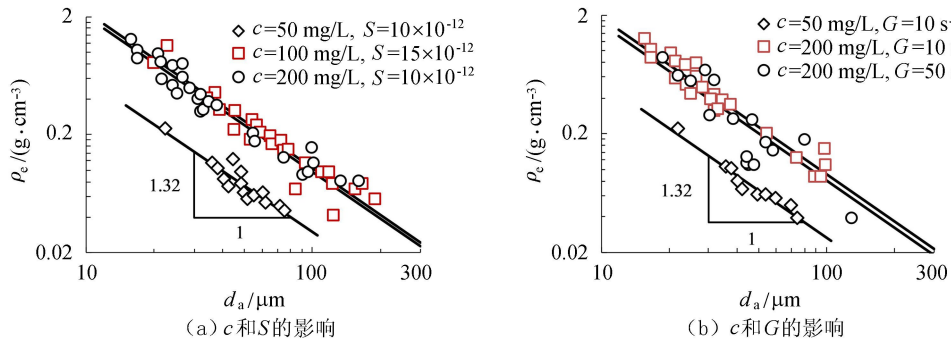


图 2 Mfolozi 河口沉积物的分形结构及其分维
Fig. 2 Fractal structure and fractal dimension of the Mfolozi estuarine sediment

者给出了不同黏性沉积物的 φ_s 、 ρ_e 与 d_a 的相关关系,如图 3 所示,图中 φ 是沉积物的孔隙率。从图 3 看出,黏性沉积物的团粒具有分形结构,不同类型黏性沉积物团粒的分维介于 1.30~2.25 之间。

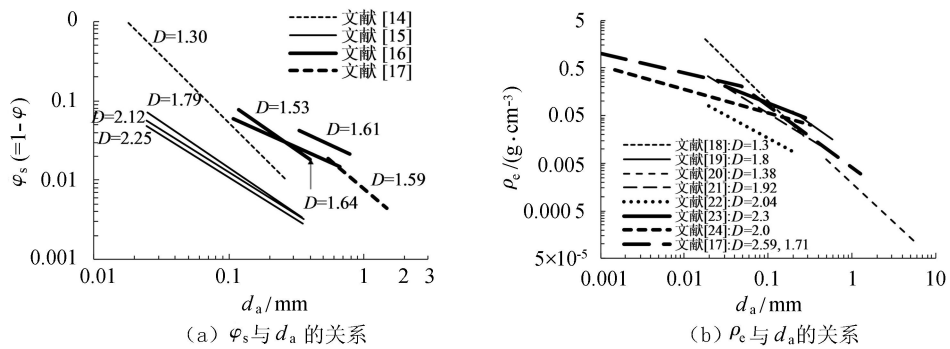


图 3 黏性沉积物的分维

Fig. 3 Fractal dimension of cohesive sediments

2 临界剪切应力的计算方法

黏土团粒在流水中的侵蚀稳定性取决于流水剪切应力特性和团粒间的联结力,流水剪切应力是团粒侵蚀的起因,团粒间的联结力是黏性沉积物抵抗流水侵蚀的阻力。如果流水的剪切应力大于黏性沉积物侵蚀的临界剪切应力,黏性沉积物产生侵蚀。

黏性团粒间的联结力主要由 van der Waals 力组成,假设基本粒子直径相同,为 d_p ,团粒间的联结力为^[25-26]

$$F_H = \frac{A_H C}{24 K^2} \frac{1}{d_p} \tag{4}$$

式中: A_H ——Hamaker 常数, $A_H \approx 10^{-20} J$; C ——压缩因子; K ——压缩函数。

黏性沉积物侵蚀的临界剪切应力取决于颗粒联结键强度和联结键数目^[27]。联结键数目与黏性团粒结构和直径有关,黏性团粒结构采用分维描述。因此,黏性沉积物中的固体颗粒联结键数目是黏性团粒的分维和直径的函数,Son 等^[10]给出侵蚀面上的固体颗粒联结键数目与团粒直径的关系:

$$n = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{d_a}{d_p} \right)^{\frac{2X}{3}} \tag{5}$$

式中: n ——联结键数目; X ——侵蚀面上团粒的骨架分维, $1 \leq X \leq D$ 。

骨架分维 X 的含义是团粒传递应力的路径分布的分维,一般小于团粒分维 D ^[6]。对于结构松散的团粒,取 $X=D$;对于密实的团粒,取 $X=D-1$ 。有关临界剪切应力的测试结果表明^[6],对于河口沉积物,取 $X=D$,可准确预测黏性沉积物的临界剪切应力。

黏性沉积物侵蚀的临界剪切应力等于侵蚀面上的联结力总和(nF_H)除以侵蚀面的面积(A_a),如果团粒结构符合分形模型,团粒侵蚀面的面积为^[9]

$$A_a = C_a \left(\frac{d_a}{d_p} \right)^D \tag{6}$$

因此,黏性沉积物侵蚀的临界剪切应力表示为^[6]

$$\tau_c = \frac{n F_H}{A_a} = \tau_{c0} \left(\frac{d_a}{d_p} \right)^\kappa \tag{7}$$

其中

$$\tau_{c0} = \frac{A_H C}{24 K^2 C_a d_p} \left(\frac{9\pi}{16} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \kappa = -\frac{3D - 2X}{3}$$

式中: C_a ——团粒的形状系数。

τ_c 用固体体积率表示为

$$\tau_c = \tau_{c0} \varphi_s^{\frac{2X-3D}{3(D-3)}} \tag{8}$$

有关黏性沉积物的 τ_c 测试成果可以用来验证 τ_c 的计算公式。Geremew 等^[28]研究了黏性尾矿料的 τ_c ,

黏性尾矿料团粒的 ρ_e 与 d_a 的关系如图4所示。根据图4中团粒粒径分布,得到黏性尾矿料团粒的分维为2.28。取 $X=D=2.28, \kappa=-0.76$,如图5所示黏性尾矿料的临界剪切应力的计算结果与试验结果一致。

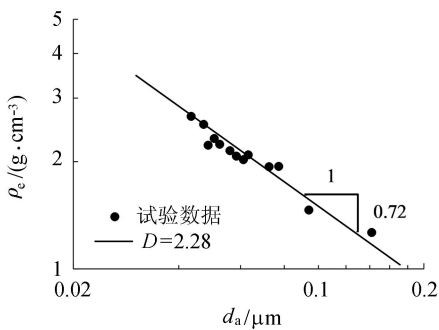


图4 黏性尾矿团粒的 ρ_e 与平均粒径的关系
Fig.4 Relationship of ρ_e to diameter of cohesive tailing aggregates

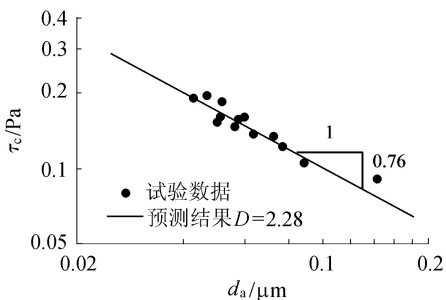


图5 黏性尾矿团粒 τ_c 与平均粒径的关系
Fig.5 Relationship of τ_c to diameter of cohesive tailing aggregates

Kusuda 等^[29]完成了日本 Chikugo 河口沉积物的侵蚀试验,得出小于某粒径的团粒质量 $P(P=M/M_T, M$ 是小于某粒径的团粒质量, M_T 是沉积物颗粒总质量)与 d_a 的关系如图6所示。根据图6中 $\lg P-\lg d_a$ 的斜率得沉积物的分维为2.48。取 $X=D=2.48, m=1.6$,沉积物侵蚀的临界剪切应力与固体体积率关系的预测结果与试验数据一致(图7)。

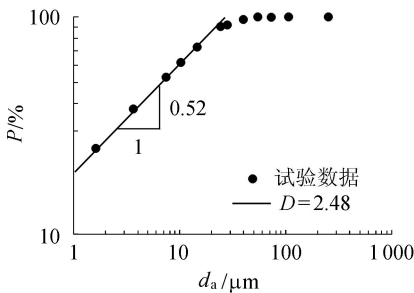


图6 Chikugo 河口沉积物的 P 与 d_a 的关系

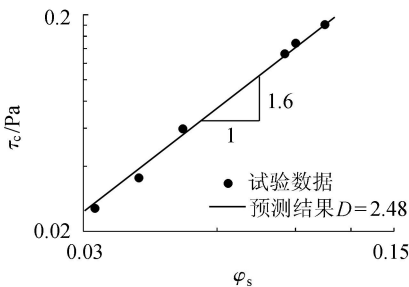


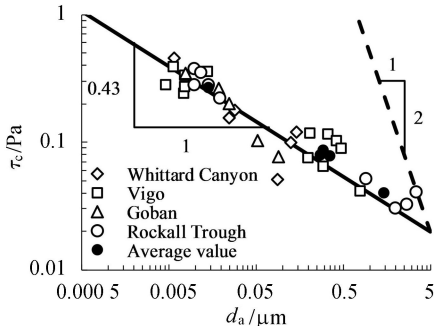
图7 Chikugo 河口沉积物的 τ_c 与 ϕ_s 的关系

Fig.6 Relationship of P to d_a of Chikugo estuarine sediment Fig.7 Relationship of τ_c to ϕ_s of Chikugo estuarine sediment

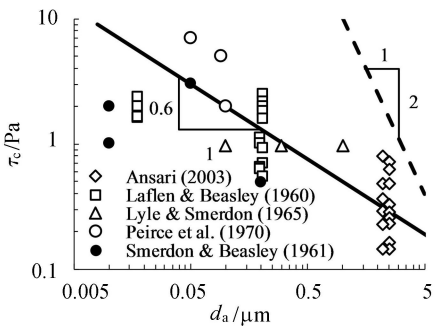
3 与 Kranenburg 模型的比较

Kranenburg^[8]基于沉积物分形结构的尺度无关性,提出沉积物侵蚀的临界剪切应力的表达式为
$$\tau_c \propto d_a^{-2} \tag{9}$$

Thomsen 等^[30]根据西欧大陆边缘水下212~4940 m深处的沉积物芯样,研究了沉积物侵蚀的 τ_c 与 d_a 关系,如图8(a)所示;不同河口沉积物侵蚀的 τ_c 与 d_a 的关系如图8(b)所示。图8中虚线是 Kranenburg 模



(a) 西欧大陆沉积物侵蚀的 τ_c 与 d_a 的关系



(b) 不同河口沉积物侵蚀的 τ_c 与 d_a 的关系^[31-32]

图8 分形模型与 Kranenburg 模型的比较
Fig.8 Comparison between the fractal model and the Kranenburg model

型预测的结果,实线是试验数据的拟合结果,试验数据的拟合结果符合分形模型。根据 Kranenburg 模型, $\lg\tau_c-\lg d_a$ 的斜率为 2,将图 8(b)中 $\lg\tau_c-\lg d_a$ 的斜率与 2 比较,发现 $\lg\tau_c-\lg d_a$ 的斜率不等于 2,且与 2 相差很大,也就是说,式(9)与河口沉积物侵蚀的 τ_c 与团粒 d_a 关系的试验数据不符合,而式(8)更符合河口沉积物侵蚀的 τ_c 与团粒 d_a 的关系,进一步验证了由黏性沉积物分型模得到 τ_c 的公式。

4 与 Son 模型的比较

Son 等^[10]基于沉积物侵蚀的 τ_c 等于联结强度与联结键数量乘积的认识,提出沉积物侵蚀的 τ_c :

$$\tau_c \propto \varphi_s^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{\rho_a - \rho_w}{\rho_p - \rho_w} \right)^{\frac{2}{3}}$$

(10)

沉积物侵蚀的 τ_c 试验数据与 Son 模型^[10]的比较结果如图 9 所示,图中虚线是 Son 模型预测的结果,实线是试验数据的拟合结果,试验数据的拟合结果符合分形模型。根据 Son 模型, $\lg\tau_c-\lg\rho_e$ 和 $\lg\tau_c-\lg\varphi_s$ 的斜率都是 2/3,图 9(a)是 Krone^[33]给出的不同河口沉积物侵蚀的 τ_c 与 ρ_e 的关系, $\lg\tau_c-\lg\rho_e$ 的斜率不是 2/3,与 Son 模型不符合;图 9(b)是 Nasser 等^[34]给出的不同条件下形成的沉积物侵蚀的 τ_c 与 φ_s 的关系, $\lg\tau_c-\lg\varphi_s$ 的斜率也不是 2/3。因此, Son 模型与沉积物侵蚀的 τ_c 的试验数据不符。相对而言,沉积物侵蚀的 τ_c 的试验数据更加符合由团粒结构分形模型提出的 τ_c 公式。

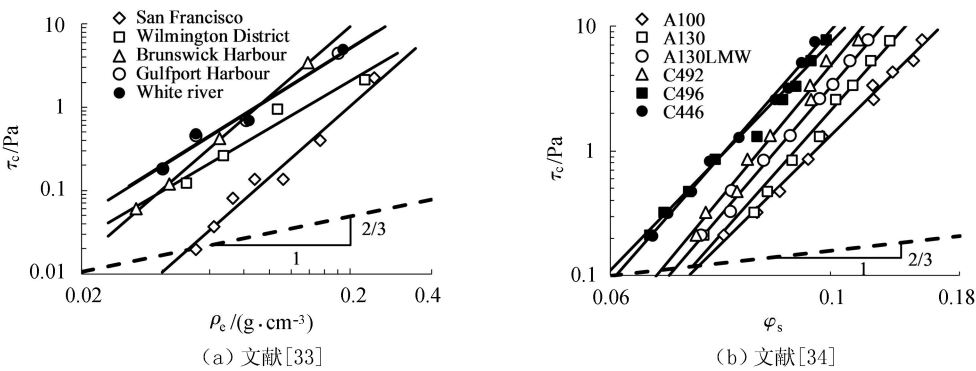


图 9 分形模型与 Son 模型的比较

Fig. 9 Comparison between the fractal model and the Son model

5 结 语

基于沉积物团粒分形模型,建立了沉积物侵蚀的临界剪切应力分形模型,得到了临界剪切应力与团粒直径、固体体积率和有效密度的理论关系,在沉积物侵蚀的临界剪切应力的分形模型中,沉积物团粒的分维是唯一的参数。沉积物侵蚀的临界剪切应力的分形模型得到了临界剪切应力试验数据的广泛验证,与 Kranenburg 模型、Son 模型相比,沉积物侵蚀的临界剪切应力的分形模型更加合理,与试验数据更加接近。

参考文献:

[1] GRABOWSKI R C, DROPPA I G, WHARTON G. Erodibility of cohe-sive sediment: the importance of sediment properties[J]. Earth Science Reviews, 2011, 105(3): 101-120.

[2] SHARIF A R, ATKINSON J F. Model for surface erosion of cohesive soils[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2012, 138(7): 581-590.

[3] WINTERWERP J C, van KESTEREN W G M. Introduction to the physics of cohesive sediment in the marine environment[M]. Amsterdam;Elsevier Science, 2004.

[4] SANFORD L P. Modeling a dynamically varying mixed sediments with erosion, deposition, bioturbation, consolidation, and armoring[J]. Computers & Geosciences, 2008, 34(10): 1263-1283.

[5] COSSETTE D, MAZUREK K A, RENNIE C D. Critical shear stress from varied method of analysis of a submerged circular turbulent impinging jet test for determining erosion resistance of cohesive soils[C]//Anon. Proceedings of the 34th International Conference on Soft Engineering. Zurich; University of Zurich, 2012: 11-18.

[6] XU Yongfu, JIANG Hao, LIU Chuanxin, et al. Fractal model for surface erosion of cohesive sediments[J]. Fractals, 2014, 22

(3): 1440006.

- [7] MEAKIN P. Fractal aggregates[J]. *Advances in Colloid and Interface Science*, 1987, 28: 249-331.
- [8] KRANENBURG C. The fractal structure of cohesive sediment aggregates[J]. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 1994, 39: 451-460.
- [9] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature[M]. San Francisco: Freeman, 1982.
- [10] SON M, HSU T J. The effect of variable yield strength and variable fractal dimension on flocculation of cohesive sediment[J]. *Water Research*, 2009, 43: 3582-3592.
- [11] MILLS P D A, GOODWIN J W, GROVER B W. Shear field modification of strongly flocculated suspensions-aggregate morphology[J]. *Colloid and Polymer Science*, 1991, 269(9): 949-963.
- [12] THOMSEN L, GUST G. Sediment erosion thresholds and characteristics of resuspended aggregates on the western European continental margin[J]. *Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers*, 2000, 47(10): 1881-1897.
- [13] MAINE C M. The flocculation dynamics of cohesive sediments in the St Lucia and Mofosi estuaries, South Africa[D]. Durban: University of KwaZulu-Natal, 2011.
- [14] GORCZYCA B. Porosity and structure of alum coagulation and activated sludge flocs[J]. *Revista MVZ Córdoba*, 2000, 15(2): 2051-2059.
- [15] HUANG H. Porosity-size relationship of drilling mud flocs: fractal structure[J]. *Clays and Clay Minerals*, 1993, 41(3): 373-379.
- [16] JOHNSON C P, LI Xiaoyan, LOGAN B E. Settling velocities of fractal aggregates[J]. *Environmental Science Technology*, 1996, 30(6): 1911-1918.
- [17] LINTERN D G. Influences of flocculation on bed properties for fine-grained cohesive sediment[D]. Oxford: Oxford University, 2003.
- [18] al ANI S, DYER K R, HUNTLEY D A. Measurement of the influence of salinity on floc density and strength[J]. *Geo-Marine Letters*, 1991, 11(3/4): 154-158.
- [19] ALLDREDGE A L, GOTSCHALK C. In situ settling behavior of marine snow[J]. *Limnology and Oceanography*, 1988, 33(3): 339-351.
- [20] FENNESSY M J, DYER K R, HUNTLEY D A. INSSEV: an instrument to measure the size and settling velocity of flocs in situ[J]. *Marine Geology*, 1994, 117(1/2/3/4): 107-117.
- [21] GIBBS R J. Estuarine flocs: their size settling velocity and density[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1985, 90(C2): 3249-3251.
- [22] MANNING A J, DYER K R. A laboratory examination of floc characteristics with regard to turbulent shearing[J]. *Marine Geology*, 1999, 160(1/2): 147-170.
- [23] DYER K R, MANNING A J. Observation of the size, settling velocity and effective density of flocs, and their fractal dimensions[J]. *Journal of Sea Research*, 1999, 41: 87-95.
- [24] MCCAIVE I N. Vertical flux of particles in the ocean[J]. *Deep Sea Research*, 1975, 22(7): 491-502.
- [25] MCCAIVE I N. Size spectra and aggregation of suspended particles in the deep ocean[J]. *Deep Sea Research*, 1984, 31(4): 329-352.
- [26] TERNAT F, BOYER P, ANSELMET F, et al. Erosion threshold of saturated natural cohesive sediments: modeling and experiments[J]. *Water Resources Research*, 2008, 44(11): W11434.
- [27] BOLLER M, BLASER S. Particles under stress[J]. *Water Science and Technology*, 1998, 37(10): 9-29.
- [28] GEREMEW A M, YANFUL E K. Role of fines on cohesive behavior of mine tailings inferred from critical shear stress[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2011, 48(4): 568-582.
- [29] KUSUDA T, UMITA T, KOGA K, et al. Erosional process of cohesive sediment[J]. *Water Science and Technology*, 1984, 17(6/7): 891-901.
- [30] THOMSEN L, GUST G. Sediment erosion thresholds and characteristics of resuspended aggregates on the western European continental margin[J]. *Deep Sea Research*, 2000, 47(10): 1881-1897.
- [31] ANSARI S A, KOTHYARI U C, RANGA RAJU K G. Influence of cohesion on scour under submerged circular vertical jet[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2003, 129(12): 1014-1019.
- [32] SMERDON E T, BEASLEY R P. The tractive force theory applied to stability of open channels in cohesive soil[J]. *Agricultural Experimental Stability Research Bulletin*, 1961, 715: 1-36.
- [33] KRONE R B. A study of rheologic properties of estuarial sediments[D]. City of Berkeley: University of California, 1963.
- [34] NASSER M S, JAMES A E. The effect of polyacrylamide charge density and molecular weight on the flocculation and sedimentation behaviour of kaolinite suspensions[J]. *Separation and Purification Technology*, 2006, 52(2): 241-252.