

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2018.06.003

# 时变边界一维对流弥散方程解析解 及其在土柱试验中的应用

程勤波<sup>1,2</sup>, 陈喜<sup>1,2</sup>, 张志才<sup>1,2</sup>, 张润润<sup>1,2</sup>, 黄日超<sup>1,2</sup>, 蔡炼彬<sup>1,2</sup>

(1. 河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏 南京 210098;  
2. 河海大学水文水资源学院, 江苏 南京 210098)

**摘要:** 运用格林函数法, 推导了一维有界时变边界对流弥散-线性耗散方程的解析解, 然后将其与数值模拟结果对比, 并分别应用于土柱热传导和溶质运移试验。结果表明: 初始条件及上、下边界条件的贡献量相互独立, 并且初始条件的影响随时间衰减, 最终消失; 解析解能很好地匹配数值模拟结果、土柱试验实测土温变化和溶质穿透曲线。

**关键词:** 对流弥散方程; 格林函数; 时变边界; 溶质运移; 热传导; 土柱试验

**中图分类号:** TV139.16      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1000-1980(2018)06-0486-06

## Analytic solution for 1D convection-dispersion equation with time-variable boundary and its application in soil column experiment

CHENG Qinbo<sup>1,2</sup>, CHEN Xi<sup>1,2</sup>, ZHANG Zhicai<sup>1,2</sup>, ZHANG Runrun<sup>1,2</sup>,  
HUANG Richao<sup>1,2</sup>, CAI Lianbin<sup>1,2</sup>

(1. State Key Laboratory of Hydrology Water Resources and Hydraulic Engineering,  
Hohai University, Nanjing 210098, China;  
2. College of Hydrology and Water Resources, Hohai University, Nanjing 210098, China)

**Abstract:** This study derived an analytical solution of 1D convection-dispersion-linear dissipation equation with variable boundary using the Green's function method, then compared the analytical solution with the numerical solution, and after that applied it to the heat conduction and solute transport experiments of a soil column. Results showed that the contributions of initial, upper and lower boundary conditions were independent. At the same time, analytical results matched the numerical simulation and the observed results of experiments well. As a conclusion, the analytical solution can represent the heat conduction and solute the transport processes well.

**Key words:** convection-dispersion equation; Green's function; time-variable boundary; solute transport; heat conduction; soil column test

对流弥散方程用于描述物体内部由于对流和弥散引发的颗粒、能量、溶质等运移过程, 广泛应用于环境科学、能源开发、流体力学和电子科学等诸多领域<sup>[1-5]</sup>。对流弥散方程是二阶偏微分方程, 难以获得解析解, 常采用数值离散方法求解。但数值离散方法只是近似求解控制方程, 因此存在计算误差, 虽然通过增加网格密度及缩短时间步长有助于提高模拟精度, 但同时也增大了计算量, 降低了计算效率。而解析解是模型的准确解, 精度高、计算速度快, 因此受到广泛关注<sup>[6-7]</sup>。

**基金项目:** 江苏省自然科学基金(BK20150809); 国家自然科学基金青年科学基金(41601013); 国家自然科学基金重大项目(41571130071)

**作者简介:** 程勤波(1984—), 男, 讲师, 博士, 主要从事地下水水文学研究。E-mail: Qinb.cheng@hhu.edu.cn

**引用本文:** 程勤波, 陈喜, 张志才, 等. 时变边界一维对流弥散方程解析解及其在土柱试验中的应用[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2018, 46(6): 486-491.

CHENG Qinbo, CHEN Xi, ZHANG Zhicai, et al. Analytic solution for the 1D convection-dispersion equation with time-variable boundary and its application in the soil column experiment[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences), 2018, 46(6): 486-491.

许多学者提出了可用于预测污染物或热在半有限空间或无限空间内运移的对流弥散方程解析法解决方案<sup>[8-9]</sup>,但有限空间解析法的数学推导极为复杂<sup>[10-11]</sup>,研究成果较少。当前对流弥散方程的求解主要借助拉普拉斯变换法,但从拉普拉斯空间解析解反向推求原始时域十分困难<sup>[6]</sup>。因此,一些学者尝试运用经典或广义的积分变换方法来研究有限空间对流弥散方程的解析解<sup>[12-14]</sup>。由于常规变换在处理非均质问题进行特征函数展开时收敛缓慢,甚至出现异常,因此目前基于广义积分仅能获取时不变或随时间指数型衰减的入流边界条件下对流弥散方程解析解,适用于有限空间域中边界条件随时间任意变化的对流弥散方程解析解鲜有报道<sup>[8-9]</sup>。在固体热传导研究领域,格林函数法<sup>[15-16]</sup>常用于求解有界时变边界热传导问题。但固体热传导控制方程没有对流项,因此如何将固体热传导的格林函数法应用于对流弥散问题有待研究。

本文拟应用格林函数法<sup>[15-16]</sup>,推求具有与时间相关边界条件的对流弥散-线性耗散方程的解析解,显式表征在不同时刻、不同位置处的初始条件及上、下边界条件对状态量的贡献量。

1 有界时变边界对流弥散-线性耗散方程解析解

一维对流弥散、线性衰减模型的一般数学表达式为<sup>[17-18]</sup>

$$\theta \frac{\partial T}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - q \frac{\partial T}{\partial x} - ST \tag{1}$$

式中: $\theta$ ——调蓄系数; $T$ ——状态量,随时间  $t$  和空间位置  $x$  变化; $\beta$ ——弥散系数; $q$ ——水流量; $S$ ——单位耗散率。

1.1 有界时变边界情形

有界时变上、下边界情形中,任意时间变化的初始条件、边界条件如下:

初始条件  $T(x,0) = T_i(x)$  (2)

上、下边界条件  $T(0,t) = T_0(t)$   $T(L,t) = T_L(t)$  (3)

式中: $T_i(x)$ ——第  $i$  节点(分段)线性插值函数; $T_0(t)$ ——随时间  $t$  变化的上边界状态量; $T_L(t)$ ——随时间  $t$  变化的下边界状态量; $L$ ——研究区(土柱)长度。

假设  $T = \varphi e^{\lambda x}$ ,其中  $\lambda = q/(2\beta)$ ,则式(1)可简化为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \left( \frac{S}{\beta} + \frac{q^2}{4\beta^2} \right) \varphi = \frac{\theta}{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{4}$$

式(2)(3)初始、边界条件转变为

初始条件  $\varphi(x,0) = \frac{T_i(x)}{e^{\lambda x}}$  (5)

上、下边界条件  $\varphi(0,t) = T_0(t)$   $\varphi(L,t) = \frac{T_L(t)}{e^{\lambda L}}$  (6)

格林函数方法认为初始、边值条件线性叠加即为方程(4)的解析解<sup>[15]</sup>。根据格林函数特征利用简单初始、边界值条件获取格林函数的数学表述为<sup>[6, 19]</sup>

$$G(x,t | x',\tau) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa \frac{\beta}{\theta} (t-\tau)} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x'\right) \tag{7}$$

式中: $G(x,t | x',\tau)$ ——格林函数; $n$ ——序列数( $n=1, 2, 3, \cdots$ ); $\kappa$ ——常数,其值为  $\kappa = (n\pi/L)^2 + S/\beta + q^2/(4\beta^2)$ 。

综合式(4)~(7),推导出任意时间变化边界对流弥散-线性耗散模型解析解为

$$T(x,t) = \left[ \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\kappa \frac{\beta}{\theta} t} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x'\right) \frac{T_i(x')}{e^{\lambda x'}} dx' + \frac{\beta}{\theta} \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\kappa \frac{\beta}{\theta} t} \int_{\tau=0}^t e^{\kappa \frac{\beta}{\theta} \tau} T_0(\tau) d\tau - \frac{\beta}{\theta} \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\kappa \frac{\beta}{\theta} t} \int_{\tau=0}^t e^{\kappa \frac{\beta}{\theta} \tau} \frac{T_L(\tau)}{e^{\lambda L}} d\tau \right] e^{\lambda x} \tag{8}$$

1.2 有界时变上边界通量下边界情形

有界时变上边界、通量下边界情形中任意时间变化的初始、边界条件如下:

初始条件  $T(x,0) = T_i(x)$  (9)

上、下边界条件

$$T(0,t)=T_0(t)\qquad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}=T_L(t)$$

(10)

假设  $T=\varphi e^{\lambda x}$ , 其中  $\lambda=q/(2\beta)$ , 则式(1)简化成式(4)。式(9)(10)初始、边界条件转化为

初始条件

$$\varphi(x,0)=\frac{T_i(x)}{e^{\lambda x}}$$

(11)

上、下边界条件

$$\varphi(0,t)=T_0(t)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{q\varphi}{2\beta}=\frac{T_L(t)}{e^{\lambda L}}$$

(12)

利用简单初始、边界值条件获取的格林函数数学表述为

$$G(x,t|x',\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}N_n e^{-\kappa\frac{\beta}{\theta}(t-\tau)}\sin(\gamma_n x)\sin(\gamma_n x')$$

(13)

其中

$$N_n=\frac{2\left(\gamma_n^2+\frac{q^2}{4\beta^2}\right)}{L\left(\gamma_n^2+\frac{q^2}{4\beta^2}\right)+\frac{q}{2\beta}}$$

式中:  $\gamma_n$ ——方程  $\tan(\gamma_n L)=-2\gamma_n\beta/q$  的解。

综合式(11)~(13), 推导出时变上边界、通量下边界的解析解为

$$T(x,t)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}N_n\sin(\gamma_n x)e^{-\kappa\frac{\beta}{\theta}t}\int_0^L\sin(\gamma_n x')\frac{T_i(x')}{e^{\lambda x'}}dx'+\frac{\beta}{\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n N_n\sin(\gamma_n x)e^{-\kappa\frac{\beta}{\theta}t}\int_{\tau=0}^te^{\kappa\frac{\beta}{\theta}\tau}T_0(\tau)d\tau-\frac{\beta}{\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n N_n\cos(\gamma_n L)\sin(\gamma_n x)e^{-\kappa\frac{\beta}{\theta}t}\int_{\tau=0}te^{\kappa\frac{\beta}{\theta}\tau}\frac{T_L(\tau)}{e^{\lambda L}}d\tau\right]e^{\lambda x}$$

(14)

2 解析解验证

试验土柱设计高 70 cm、内径 28 cm, 其侧壁每隔 5 cm 设有一个仪器插入孔, 分别埋设土壤湿度计(TDR)与土壤温度计(图 1); 其底部设有滤网, 水流可通过滤网流入或流出土柱。土柱外层有塑料桶隔离, 以减少土温衰减作用。采用马氏瓶控制土柱顶部水位为恒定值(如 69 cm), 并设置土柱底部水位为 0 cm, 以保证土柱中稳定水流过程。通过对比 3 套参数情形下对流弥散方程差分数值解和解析解检验笔者提出的理论。数值差分程序利用 C 语言编制, 空间上采用中心差分格式, 时间上采用隐式差分格式<sup>[7]</sup>。式(1)中的 3 套对流弥散方程参数值如下: 情形 1、2、3 的对应的  $q$  分别为 0 cm/min、0.063 cm/min、0.2 cm/min,  $\beta$  皆为 1 cm<sup>2</sup>/min,  $\theta$  皆为 1,  $S$  皆为 0 min<sup>-1</sup>。

2.1 热传导

假设土柱上边界温度稳定为 1℃, 下边界的温度稳定为 0℃, 初始状态土柱中土壤温度均为 0℃。3 套对流弥散方程参数情形下, 差分数值模拟和解析解(式(8))求得的土柱中间位置(即 35 cm)土温变化过程见图 2。图 2 中解析解和数值模拟结果之间的均方根误差分别为 0.000 2、0.000 5 和 0.001 2, 都接近于 0, 表明解析解和数值解几乎相同, 说明本文推导的解析解合理可靠。同时, 图 2 也显示随着对流速度  $q$  增加, 温度的传导速率随之增大, 该现象与实际情况吻合。

2.2 溶质运移

假设土柱上边界溶质质量浓度稳定为 1 g/L, 下边界为自由出流边界, 即  $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}=0$ , 初始状态土柱中溶质质量浓度为 0 g/L。3 套对流弥散方程参数情形下, 差分数值模拟和解析解(式(14))所得的土柱底部溶质质量浓度变化过程见图 3。图中解析解和数值模拟结果之间的均方根误差分别为 0.000 1、0.000 4 和 0.004, 都接近 0, 表明解析解和数值解几乎相同, 说明本文推导的解析解正确可信。同时, 图 3 中解析解也正确表征了溶质运移速率随着对流速度  $q$  增加而增大的现象。

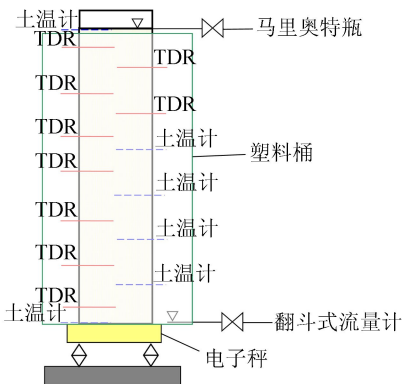


图 1 土柱试验装置示意图

Fig.1 Test equipment of heat transfer in the soil column

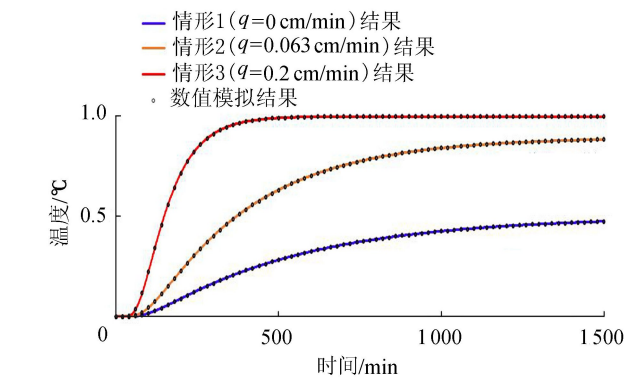


图 2 土柱中间位置(35 cm)土温变化解析解与数值模拟结果对比

Fig. 2 Comparison of analytical and numerical temperatures in the middle of soil column

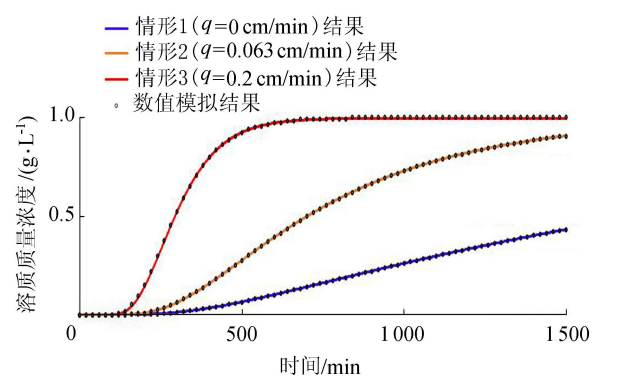


图 3 土柱底部溶质质量浓度变化解析解与数值模拟结果对比

Fig. 3 Comparison of analytical and numerical solute concentrations at the bottom of soil column

3 解析解在土柱试验中的应用

3.1 土柱热传导试验

土柱热传导试验设计如图 1 所示,试验土样采自常州市金坛朱林镇红旗圩村试验田。土壤黏粒(<0.002 mm)、粉粒(0.05~0.002 mm)、砂粒(2~0.05 mm)的质量分数分别为 11.5%、76.50%、12.0%。参照美国土壤粒径分类标准,试验土样为粉砂质壤土。将土样晾干、碾碎后,过 3 mm 口径筛除大颗粒土壤,分层(5 cm)装填入土柱,每层 4403 g,确保土壤均质、干密度与野外原状土相同(1.43 g/cm<sup>3</sup>),装填深度 68 cm。

土柱稳定流入渗试验操作步骤如下:(a) 水头控制:用马氏瓶控制土柱顶部水位为 69 cm,并控制土柱底部水位为 0 cm;(b) 土柱底部出流量观测:用翻斗式流量计测量土柱溢流量;(c) 土温观测:用温度计自动记录土壤温度,设置数据记录时间间隔为 2 min,并在土柱顶部、底部埋设土温计,分别测定入流、出流水温度。

共进行了 2 次稳定入渗试验,时间分别为(第 1 次)2015 年 12 月 7—14 日和(第 2 次)2016 年 3 月 24 日至 4 月 1 日,实测埋深 28 cm、38 cm、48 cm 和 58 cm 处土温的变化,分别用于模型参数率定和模型验证。将埋深 28 cm 处的土温计观测结果作为上边界,以减少外界影响;将埋深 68 cm 处土温计观测结果作为下边界,模拟埋深 38 cm、48 cm、58 cm 处土温的变化。

解析式(式(8))有 4 个参变数:多孔介质和液相的  $\theta$ 、 $\beta$ 、 $q$  和  $S$ ,其中  $\theta$ 、 $q$ 、 $S$  可通过实测值推求。由于土柱外层有塑料桶隔离,因此土温线性衰减作用可忽略,故  $S=0$ 。根据时域反射仪 TDR 观测值,土壤饱和时实测的土壤含水率  $\theta_s$  为 0.46,可得固体土壤的体积量为 0.54,求出  $\theta=0.709$ 。由土柱底部翻斗式流量计测定  $q$ ,第 1 次,第 2 次稳定流试验的  $q$  分别为 0.001 99 cm/min、0.001 88 cm/min。第 1 次试验测得的  $q$  略大于第 2 次试验结果,可能是土柱长期暴露在野外,大量降雨入渗对土壤压实的结果。

剩余待求参数为土温弥散系数  $\beta$ ,以计算的土壤温度与第 2 次试验实测土壤温度的均方误为目标,采用蒙特卡洛法寻求最优参数,获得的最优模型参数值为  $\beta=0.493$  cm<sup>2</sup>/min,对应的土温最小均方根误差值为 0.455 °C。

解析式(式(8))计算结果与第 2 次试验观测值对比及不同初、边值条件的影响见图 4。利用纳什效率系数( $R_{NSE}$ )评估模拟效果<sup>[20]</sup>。各观测点  $R_{NSE}$  均大于 0.95,表明推求的解析解可较好地模拟实际土壤水热传导过程。图 4 显示上边界条件对土温的贡献随着埋深的增加而不断减小,下边界条件的影响不断增强,推断是温度扩散作用影响的结果;在上、下边界的中间位置(即埋深 48 cm 处)上边界的影响明显强于下边界,推断是土壤水对流作用影响的结果;各个观测点位置,初始条件的影响均随着时间不断削弱,在长时间序列模拟的后期,其影响都可以忽略,表明初边值问题的对流弥散数学模型对变量初始状态的精度要求不高。

模型验证中第 1 次试验各观测点效率系数也均大于 0.90,表明率定后的对流弥散热传导模型具有较高的可靠性。

3.2 土柱溶质运移模拟

土柱溶质运移试验供试土样为长江下游黄色粗河沙,其粒径级配为:>2.0 mm(占 4.43%,质量分数,下

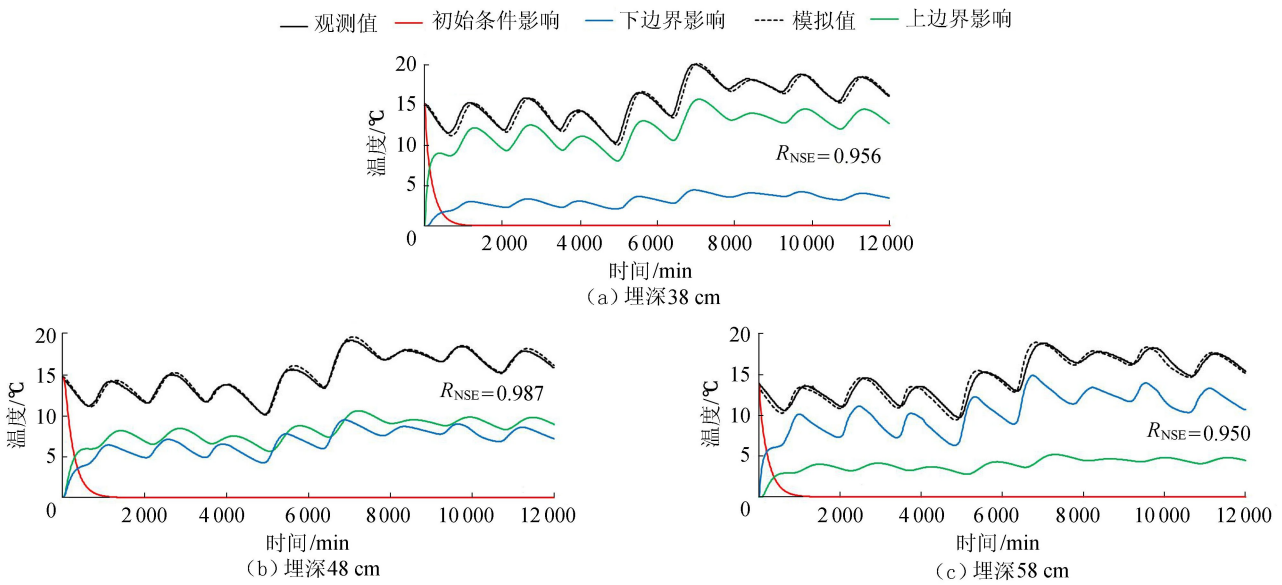


图4 率定期模拟结果与观测值对比,以及初、边值条件影响

Fig. 4 Comparison of simulated temperatures by analytical solution and observations in the calibration period, and contributions of initial and boundary conditions

同), 0.5~2.0 mm(占23.65%), 0.25~0.5 mm(占52.52%), 0.075~0.25 mm(占19.12%), <0.075 mm(占0.28%)。砂样风干后过2 mm 钢筛除去粗粒杂质,然后采用分层填充法均匀填充入土柱,填充高度为67.5 cm,干密度为1.4 g/cm<sup>3</sup>(图1)。河沙颗粒较粗,对溶质吸附、降解等作用较小,适合采用对流弥散方程(式(1))描述其溶质运动。溶质运移试验步骤如下:(a)用马氏瓶控制土柱顶部水位69 cm,并确保土柱底部自由出流,同时测定土柱底部出流量,利用达西定律推求土柱渗透系数;(b)在马氏瓶中装入Cl<sup>-</sup>质量浓度为18 g/L的咸水,自上而下定水头供入土柱,并每隔30 s 测定土柱底部水流的Cl<sup>-</sup>质量浓度。

解析式(式(14))有4个参变数: $\theta$ 、 $\beta$ 、 $q$ 和 $S$ 。在溶质运移试验中,溶质不存在耗散,故 $S=0$ 。粗砂对Cl<sup>-</sup>的吸附可以忽略,因此调蓄系数 $\theta=1$ 。根据达西试验测到的砂土渗透系数为 $3.53\times10^{-4}$  m/s,土柱的稳定水流通量 $q=0.0364$  cm/s。剩余待求参数 $\beta$ 采用参数优化方式求取,获得的最优值 $\beta=0.0293$  cm<sup>2</sup>/s。该值换算成弥散度为0.27 cm,其与马建良等<sup>[18]</sup>采用数值反演法求得的结果接近,表明解析解合理可靠。解析解模拟结果与实测值对比如图5所示。图中解析解和实测值之间的均方根误差仅为0.26,  $R_{NSE}$ 接近1.0,表明解析解和实测值几乎完全重合,说明解析解能有效表征溶质运移过程。

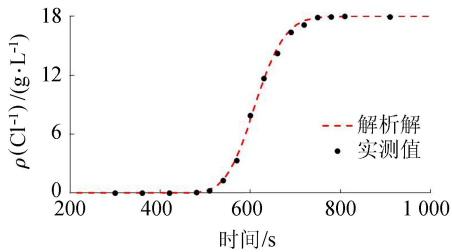


图5 土柱底部溶质浓度解析解与实测值对比

Fig.5 Comparison of simulated and observed solute concentrations at the bottom of soil column

4 结论与展望

依据格林函数法求得对流弥散方程的解析解。解析解与数值解模拟结果几乎相同,表明本文推导的解析解合理可靠。解析解应用于土柱热传导试验,显示率定期解析解模拟的土温变化与实测值对比的效率系数均高于0.95,验证期的效率系数也均高于0.9,表明解析解能较好地表征实际土柱中热运移过程。热传导试验解析解模拟结果显示:(a)初始条件及上、下边界条件都对土壤热量有贡献,但各自的贡献量相互独立;(b)初始条件对土温的影响随时间增长而不断减弱,一段时间后可以忽略其影响;(c)土柱上边界条件对土温的影响随着埋深增大而不断减弱,下边界条件的影响则不断增强;(d)由于对流存在,在土柱中间位置,上边界条件对土温的影响强于下边界条件,同时由于上边界处土温变幅大于下边界处,从而导致土柱中土壤温度变幅随土壤埋深增大而减小。解析解模拟溶质运移试验显示解析解不但能很好地拟合穿透曲线,而且其反演溶质运移参数与数值模拟结果相近,表明本文推导的解析解可靠、实用。

本文推导了一维有界时变边界对流弥散-线性耗散模型的解析解,但更高维度的解析解有待深入研究。

## 参考文献:

- [1] DOU Zhi, ZHOU Zhifang, WANG Jinguo. Three-dimensional analysis of spreading and mixing of miscible compound in heterogeneous variable-aperture fracture[J]. *Water Science and Engineering*, 2016, 9(4):293-299.
- [2] 黄勇,周志芳. 多尺度裂隙介质中溶质运移研究进展[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2005, 33(5):500-504. (HUANG Yong, ZHOU Zhifang. Advances in research on solute transport in multi-scale fractured media[J]. *Journal of Hohai University (Natural Science)*, 2005, 33(5):500-504. (in Chinese))
- [3] 王超,束龙仓,鲁程鹏. 渗透系数空间变异性对低渗透地层中地下水溶质运移的影响[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2014, 42(2):137-142. (WANG Chao, SHU Longcang, LU Chengpeng. Impacts of spatial variability of hydraulic conductivity on solute transport in groundwater of low-permeability stratum[J]. *Journal of Hohai University (Natural Sciences)*, 2014, 42(2):137-142. (in Chinese))
- [4] 陶安,刘曙光,娄厦,等. 含水层中重金属溶质运移动力学模型研究进展[J]. 水资源保护, 2015, 31(4):8-14. (TAO An, LIU Shuguang, LOU Xia, et al. Advances of dynamics model for heavy metal solute transport in aquifer[J]. *Water Resources Protection*, 2015, 31(4):8-14. (in Chinese))
- [5] 王礼恒,李国敏,董艳辉. 裂隙介质水流与溶质运移数值模拟研究综述[J]. 水利水电科技进展, 2013, 33(4):84-88. (WANG Liheng, LI Guomin, DONG Yanhui. Review of numerical simulation of flow and solute transport in fractured media[J]. *Advances in Science and Technology of Water Resources*, 2013, 33(4):84-88. (in Chinese))
- [6] 梁昆森. 数学物理方法[M]. 北京:高等教育出版社, 2010.
- [7] 李庆扬. 数值分析[M]. 北京:清华大学出版社有限公司, 2001.
- [8] CHEN Juisheng, LIU Yihuan, LIANG Chingping, et al. Exact analytical solutions for two-dimensional advection dispersion equation in cylindrical coordinates subject to third type inlet boundary condition[J]. *Advances in Water Resources*, 2011, 34(3):365-374.
- [9] CHEN Juisheng, LIU Chenwu. Generalized analytical solution for advection-dispersion equation in finite spatial domain with arbitrary time-dependent inlet boundary condition[J]. *Hydrology and Earth System Sciences*, 2011, 15(8):2471-2479.
- [10] GUERRERO J S P, PIMENTEL L C G, SKAGGS T H, et al. Analytical solution of the advection diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2009, 52:3297-3304.
- [11] GUERRERO J S P, PIMENTEL L C G, SKAGGS T H, et al. Analytical solution for multi-species contaminant transport subject to sequential first-order decay reactions in finite media[J]. *Transport in Porous Media*, 2009, 80:357-373.
- [12] CLEARLY R W, ADRIAN D D. Analytical solution of the convective-dispersive equation for cation adsorption in soils[J]. *Soil Science Society of America, Proceedings*, 1973, 37:197-199.
- [13] SELIM H M, MANSELL R S. Analytical solution for transport of reactive solutes through soils[J]. *Water Resources Research*, 1976, 3(12):528-532.
- [14] van GENUCHTEN M T, ALVES W J. Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation [R]. Washington D. C. : U. S. Department of Agriculture, Technical Bulletin No. 1661, 1982.
- [15] OZISIK M N. Heat conduction[M]. Second Edition. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- [16] COLE K D, BECK J V, HAJI-SHEIKH A, et al. Heat conduction using Green's functions[M]. 2nd Edition. Oxfordshire: Taylor & Francis Group/CRC Press, 2010.
- [17] 陈喜,程勤波,张志才. 饱和-非饱和水流数值模拟[M]. 北京:中国水利水电出版社, 2011.
- [18] 马建良,陈喜,程勤波,等. 一维变密度溶质运移实验及参数推求[J]. 水资源保护, 2008, 24(3):8-11. (MA Jianliang, CHEN Xi, CHENG Qinbo, et al. Identification of hydrodynamic parameters based on one-dimensional variable density and solute transport numerical model[J]. *Water Resources Protection*, 2008, 24(3):8-11. (in Chinese))
- [19] POLYANIN A D, ZAITSEV V F. Handbook of exact solutions for ordinary differential equations[M]. 2nd Edition. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
- [20] CHENG Qinbo, CHEN Xi, XU C Y, et al. Using maximum likelihood to derive various distance-based goodness-of-fit indicators for hydrologic modeling assessment[J]. *Stochastic Environmental Research & Risk Assessment*, 2018, 32(4):949-966.