

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2019.03.013

两条等长共线裂纹尖端塑性区扩展理论研究

高 玮,肖 婷,王 旭,王 晨

(河海大学土木与交通学院,江苏 南京 210098)

摘要:采用 Kachanov 法基本思想求解 2 条等长共线裂纹相互作用下裂纹的应力强度因子,分别基于 Mises 屈服准则和 D-P 屈服准则推导了裂纹尖端塑性区半径的表达式,并求得裂纹相互作用下塑性区半径的扩大倍数,其值为 2 条裂纹相互作用下的应力强度因子与单裂纹状态下应力强度因子比值的平方。在此基础上,分析了裂纹间距对塑性区扩展的影响。研究发现,同一裂纹倾角下裂纹间距与裂纹长度比值越小,2 条裂纹尖端的塑性区半径越大,裂纹尖端塑性区扩展速度越快,直至塑性区发生接触,且不同的裂纹倾角,裂纹尖端塑性区发生接触的条件不同。

关键词:等长共线裂纹;裂纹间相互作用;裂纹尖端塑性区;应力强度因子;裂纹间距

中图分类号:P642.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-1980(2019)03-0271-05

Theoretical study on expansion of plastic zone at crack tips of isometric collinear cracks

GAO Wei, XIAO Ting, WANG Xu, WANG Chen

(College of Civil and Transportation Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Based on the basic idea of the Kachanov method, the stress intensity factors for the interaction of isometric collinear cracks are computed. Moreover, according to the Mises failure criterion and the D-P failure criterion, the expression of the plastic zone radius at the crack tip and the expansion ratio of plastic zone radius under the crack interaction are derived based on the small-area yield condition under the uniaxial tension. The radius enlargement of the plastic zone is the square of the ratio of the stress intensity factor under the interaction of two cracks to the stress intensity factor of a single crack. And, the influence of crack spacing on the plastic zone expansion is also analyzed. The results show that, for a same inclining angle of crack, the plastic zone radius of crack tip increases with the decrease of crack spacing, and its increasing rate increase as well. For different crack angles, the contact conditions at the plastic zone of crack tip are also different. Therefore, the combination conditions of double cracks need to be determined according to the inclining angle of crack.

Key words: isometric collinear crack; crack interaction; plastic zone of crack tip; stress intensity factor; crack spacing

在工程结构和工程材料中都不可避免地存在着类似裂纹的缺陷。裂纹的存在和扩展,降低了结构的承载能力,而多裂纹相互作用下,材料更容易发生断裂破坏。因此,研究相互作用下裂纹的扩展机理对实际工程具有重要的意义。目前已有许多关于多裂纹相互作用问题的研究。朱帝杰等^[1]基于经典 Kachanov 法,通过分析考虑裂纹相互作用及不考虑相互作用下应力强度因子比的变化趋势,分别研究了拉剪和压剪两种状态下平行偏置双裂纹间水平距离、垂直距离、裂纹长度以及裂纹倾角对其相互作用的影响规律。石路杨等^[2]建立了求解多裂纹扩展的扩展有限元法,引入裂纹交叉汇合加强函数分析多裂纹交叉汇合的过程。周

基金项目: 教育部中央高校科研业务费项目(2016B10214)

作者简介: 高玮(1971—),男,教授,博士,主要从事岩石力学与工程研究。E-mail:wgaowh@163.com

通信作者: 肖婷,硕士研究生。E-mail:xiaot_09@163.com

引用本文: 高玮,肖婷,王旭,等. 两条等长共线裂纹尖端塑性区扩展理论研究[J]. 河海大学学报(自然科学版),2019,47(3):271-275.
GAO Wei, XIAO Ting, WANG Xu, et al. Theoretical study on expansion of plastic zone at crack tips of isometric collinear cracks[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences),2019,47(3):271-275.

小平等^[3]基于扩展有限元法,模拟压应力状态下多裂纹扩展过程。该方法通过迭代计算,得到压应力状态下裂纹的扩展路径及应力场。陈小翠等^[4]采用新型裂尖改进函数构建的 Reduced XFEM,利用互作用积分法计算应力强度因子,研究次裂纹与主裂纹的相互作用,以及次裂纹的长度和间距对主裂纹应力强度因子的影响。Haeri 等^[5]研究了单、双裂纹的火山石灰泥(PPC)试样在单轴荷载下裂纹扩展路径。Cao 等^[6]基于含 3 条预置裂纹的岩石材料单轴压缩试验,研究了多裂纹的萌生、压密、扩展和贯通机制。

由于裂纹尖端的应力集中,裂尖附近的材料必定发生屈服,在裂纹扩展前端必然存在塑性区。Irwin 等^[7-9]、李世恩等^[10]研究了小范围屈服情况,指出在该条件下应力强度因子仍有意义。根据 Swift^[11]在金属材料中的研究结论,当裂纹之间的塑性区发生接触后,2 条裂纹会迅速发生贯通破坏,从而降低材料的强度,加快材料的破坏。因此,有必要对多裂纹相互作用下裂纹尖端塑性区的扩展规律进行研究,从而减小裂纹扩展对材料或结构带来的破坏性影响。

本文根据断裂力学基本原理、现有裂纹塑性区扩展理论及试验结果,采用 Kachanov 法^[12-14]基本思想计算了 2 条裂纹相互作用下的应力强度因子,并基于 Mises 准则和 D-P 准则推导了 I、II 型复合裂纹在小范围屈服条件下裂纹尖端塑性区半径的表达式和裂纹相互作用下塑性区半径的扩大倍数,研究裂纹间距对塑性区扩展的影响。

1 塑性区半径的求解

应力强度因子是表征裂纹尖端应力场强弱的物理量,因此,要对裂纹尖端塑性区半径进行推导,需先计算 2 条裂纹相互作用下的应力强度因子。在工程构件内部, I 型裂纹最为常见,而 II 型裂纹最危险,容易引起低应力脆断。对于一般的二维平面裂纹,裂纹尖端场是 I 型和 II 型应力场的线性叠加。因此,本文主要针对 I、II 型复合裂纹进行研究。

如图 1 所示,含 2 条裂纹的无限大板远场受均匀拉伸荷载 P_∞ 作用,裂纹长度为 $2a$,裂纹方向与水平方向夹角为 β ,其上的局部坐标系为 $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$ 。整体坐标系为 xOy ,在两裂纹中心处。

根据 Kachanov 法^[14]的基本思想,将此问题分解为 2 个子问题,每个子问题含 1 条裂纹,根据叠加原理,求得 I 型、II 型裂纹的应力强度因子 K_I, K_{II} 。

$$\begin{cases} K_I(\pm a) \\ K_{II}(\pm a) \end{cases} = \frac{p_\infty(1 + \cos 2\beta)}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a \pm \xi_1}{a \mp \xi_1}} \left(1 + \frac{1 + \Lambda_{1,2}^{kl}}{1 - \Lambda_{1,2}^{kl} \Lambda_{2,1}^{kl}} f_{2,1}^{kl} \right) d\xi_1$$

(1)

其中

$$\Lambda_{1,2}^{kl} = \frac{1}{2a_1} \int_{-a_1}^{a_1} f_{1,2}^{kl} d\xi_1 \quad (k, l = n, t)$$

式中: $f_{1,2}^{kl} f_{2,1}^{kl}$ ——裂纹相互作用系数 $(k, l = n, t)$, 例如: 当 $k = n$ 时, $f_{1,2}^{nn}$ 、 $f_{1,2}^{nt}$ 为裂纹 1 面上的单位均布法向应力在裂纹 2 上产生的法向应力和切向应力; 当 $k = t$ 时, $f_{1,2}^{tn}$ 、 $f_{1,2}^{tt}$ 为裂纹 1 面上的单位切向力在裂纹 2 上产生的法向应力和切向应力; a_1 ——裂纹 1 长度的 1/2。

1.1 Mises 屈服准则

设材料服从 Mises 屈服条件,根据文献[7],利用应力强度因子 K_I, K_{II} 来表示裂纹尖端应力分量,并代入 Mises 屈服准则,得到平面应力及平面应变 2 种条件下裂纹尖端塑性区边界的极坐标方程:

$$r = \begin{cases} \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \left(M^2 + \frac{3}{4} N^2 \right) & \text{平面应力} \\ \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \left[M^2 (1 - 2\mu)^2 + \frac{3}{4} N^2 \right] & \text{平面应变} \end{cases}$$

(2)

其中

$$M = \cos \frac{\theta}{2} - \lambda \sin \frac{\theta}{2} \quad N = [\sin^2 \theta + 2\lambda \sin 2\theta + \lambda^2 (4 - 3\sin^2 \theta)]^{\frac{1}{2}}$$

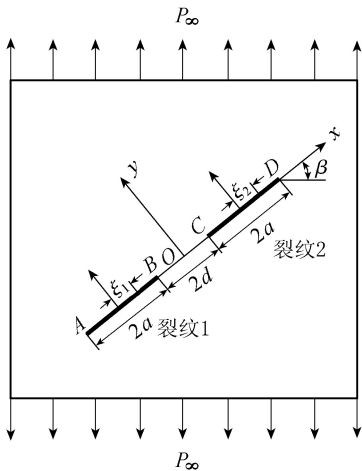


图 1 含两共线等长裂纹的无限大板
Fig. 1 Infinite plate with two isometric collinear cracks

$$\lambda = \frac{K_{\parallel}}{K_{\perp}}$$

式中: r ——裂纹尖端塑性区屈服半径; μ ——泊松比; σ_s ——材料单轴拉伸下的屈服强度; θ ——裂纹尖端塑性区半径与裂纹面的夹角。

由式(2)可以发现,平面应力和平面应变条件下的塑性区形状并不相同。同样的应力强度 K 时,平面应变下的塑性区半径小于平面应力的塑性区半径。这是因为平面应变状态下最小主应力 $\sigma_3 \neq 0$,材料处于三轴拉伸应力状态,而 Mises 屈服准则认为静水应力状态不影响屈服。

1.2 D-P 屈服准则

设材料服从 D-P 塑性屈服准则,将应力强度因子 $K_{\perp}$ 、 $K_{\parallel}$ 代入该准则可以得到屈服半径 r 。

$$r = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}\alpha K_{\perp}}{\sqrt{\pi k}} M + \frac{K_{\perp}\sqrt{S}}{2\sqrt{3\pi k}} \right)^2 & \text{平面应力} \\ \left[\frac{\sqrt{2}\alpha K_{\perp}}{\sqrt{\pi k}} (1 + \mu) M + \frac{K_{\perp}\sqrt{T}}{2\sqrt{3\pi k}} \right]^2 & \text{平面应变} \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$S = 2M^2 + \frac{3}{2}N^2 \quad T = M^2(1 - 2\mu)^2 + \frac{3}{2}N^2$$

式中: α 、 k ——与岩土类材料内摩擦角及黏聚力相关的常数。

将 2 条裂纹尖端塑性区半径与单条裂纹时的塑性区半径比值记作 η ,该值表示 2 条裂纹相互作用下裂纹尖端塑性区半径的扩大倍数。通过式(2)和式(3)可以发现,无论基于哪种屈服准则, η 表达式均为

$$\eta = \frac{r}{r_0} = \frac{K_{\perp}^2}{K_{\perp 0}^2} = \frac{K_{\parallel}^2}{K_{\parallel 0}^2} \tag{4}$$

式中: r_0 ——单条裂纹时的屈服半径; $K_{\perp 0}$ ——板内只含单条裂纹时的 I 型应力强度因子; $K_{\parallel 0}$ ——板内只含单条裂纹时的 II 型应力强度因子。

由上文可知,塑性区半径的大小不仅依赖于屈服准则的选取,同时也受应力强度因子的影响。裂纹尖端塑性区半径的大小与应力强度因子有关,2 条裂纹相互作用下裂纹尖端塑性区半径的扩大倍数是应力强度因子的平方。

2 裂纹间距对塑性区扩展的影响

本文研究基于裂纹尖端小范围附近区域发生屈服,且裂纹间距相比裂纹长度较小,故忽略裂纹塑性区扩展过程中裂纹尖端塑性应力场的变化。

张显余等^[15]对不同塑性区半径与裂纹长度比的计算精度进行研究,发现精确度随着屈服半径的增大而迅速下降,从而造成计算误差相对较大,而 $r/a \leq 0.1$ 是应力强度因子 K 应用的最低条件。

因此,本文基于 $r/a \leq 0.1$,考虑裂纹尖端塑性区应力松弛的影响,此情况下裂纹尖端的塑性区半径为不考虑应力屈服下计算所得屈服半径的 2 倍^[8],即 $R = 2r_s = \frac{K_{\perp}^2}{\pi\sigma_s^2}(r_s \text{ 为计算屈服半径})$ 。

在 Mises 屈服准则下,当 $0 < \beta < \pi/2$ 时,若保证裂纹延长线方向上满足裂纹尖端小范围屈服条件,由式(2)可计算出在平面应力条件下 $\frac{p_{\infty}}{\sigma_s} \leq \sqrt{\frac{0.1}{\cos^4\beta + 3\sin^2\beta\cos^2\beta}}$,对其求导得 β 在区间 $(0, \pi/2)$ 内 $\pi/6$ 处取得极小值,即在此区间上,随着裂纹倾角的增加, p_{∞} 产生破坏的值先减小、后增大。裂纹倾角分别为 0 、 $\pi/6$ 、 $\pi/4$ 、 $\pi/3$ 时, p_{∞}/σ_s 分别为 0.316 、 0.298 、 0.316 及 0.4 。

取 $B(-d, 0)$ 、 $C(d, 0)$,裂纹长度为 $2a$,间距为 $2d$,通过改变 d ,即裂纹内尖端(B 点、 C 点)的横坐标,来得到不同的裂纹间距与裂纹长度之比,即 d/a 。 Δd 表示 2 条裂纹内尖端的间距与其尖端塑性区半径之和的差值。 $\Delta d/(2d)$ 表示裂纹间未屈服的长度占裂纹间距的百分比。当 $\Delta d > 0$ 时,表明 2 条裂纹尖端塑性区未发生接触;而 $\Delta d \leq 0$ 时,表明 2 条裂纹尖端塑性区发生接触,此时可认为裂纹间的材料会迅速屈服,并会发生断裂破坏,即可以合并为 1 条裂纹来考虑,而不再视其为 2 条单独裂纹^[16]。此时 $\Delta d/(2d)$ 计为 0。

计算裂纹倾角为 0 、 $\pi/6$ 、 $\pi/4$ 和 $\pi/3$ 时,不同裂纹间距条件下的应力强度因子值、塑性区半径,分析不同

d/a 值对裂纹间未屈服的长度占裂纹间距的百分比 $\Delta d/(2d)$ 的影响,计算结果见表 1。

由表 1 可发现 4 种裂纹倾角下,裂纹内尖端塑性区半径随 d/a 的变化规律相同,即随着裂纹间距的减小,2 条裂纹尖端塑性区半径增大,裂纹内间距未屈服的百分比减小,裂纹尖端塑性区扩展速度加快,直至塑性区发生接触,裂纹内间距全部屈服。对于同一裂纹间距与裂纹长度之比,裂纹倾角越小,裂纹内尖端塑性区半径越大。以 $\beta=0$ 时的情况为例,当 $d/a\geqslant 0.3$ 时,2 条裂纹间未屈服的长度占裂纹内尖端距离的百分比在 50% 以上,且随着 d/a 的增加而增加。而当 $d/a=0.2$ 时,该比值迅速下降到 18.73%。当 $d/a=0.16$ 时, $\Delta d<0$,表明此时 2 条裂纹内尖端塑性区已经相互接触,可将其视为 1 条裂纹进行研究。

图 2 为 4 种裂纹倾角下,裂纹延长线方向上的塑性区屈服半径与裂纹半间距 d 随 d/a 变化曲线。两线相交,即 2 条等长裂纹在其裂纹方向的塑性区发生接触,可以将 2 条裂纹合并为 1 条裂纹来考虑。

表 1 不同 d/a 值下的 $\Delta d/2d$
Table 1 $\Delta d/2d$ at different values of d/a

d/a	$\Delta d/2d$			
	$\beta=0$	$\beta=\pi/6$	$\beta=\pi/4$	$\beta=\pi/3$
0.10	0	0	0	0
0.14	0	0	0	34.67
0.16	0	2.41	13.25	45.78
0.18	10.36	28.32	24.92	54.02
0.20	18.73	58.35	36.28	60.18
0.30	52.78	71.21	62.98	76.86
0.40	67.36	78.19	74.41	84.01
0.50	75.27	2.41	80.61	87.88

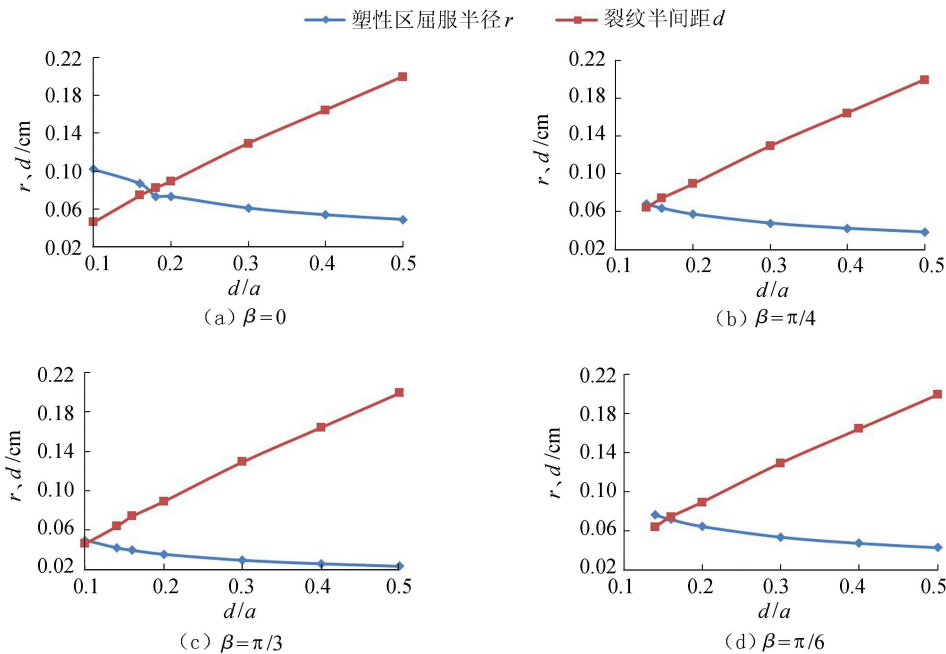


图 2 沿裂纹延长线上的 r 和 d 随 d/a 变化曲线
Fig. 2 Variation curves of r and d of plastic zone with d/a

由图 2 可知,不同的裂纹倾角,裂纹尖端塑性区发生接触的条件也不一样。裂纹倾角为 0 时,塑性区发生接触的条件为 $d/a\leqslant 0.17$;裂纹倾角为 $\pi/6$ 时,塑性区的接触条件为 $d/a\leqslant 0.158$;裂纹倾角为 $\pi/4$ 为时,塑性区接触的条件为 $d/a\leqslant 0.14$;裂纹倾角为 $\pi/3$ 时,塑性区接触的条件为 $d/a\leqslant 0.1$ 。我国现行规范 GB/T 19624—2004《在用含缺陷压力容器安全评定》中关于共面双穿通裂纹的合并条件为:裂纹间距小于次裂纹长度。因此从线弹性条件考虑本文的处理办法是偏安全的。

3 结 论

a. 分别基于 Mises 屈服准则和 $D-P$ 屈服准则推导了在平面应力及平面应变下两等长共线裂纹相互作用下裂纹尖端小范围塑性区半径的极坐标表达式,并可发现,裂纹尖端塑性区不仅依赖于屈服准则的选取,同时也受应力强度因子的控制。

b. 2 条裂纹相互作用下,裂纹尖端塑性区半径扩大倍数 $\eta=\frac{r}{r_0}=\frac{K_1^2}{K_{10}^2}$ 。即 2 条裂纹尖端塑性区半径与单条裂纹时的塑性区半径比值为相应条件下应力强度因子的平方。

c. 基于 Mises 屈服准则研究裂纹间距对塑性区的影响。研究发现,同一裂纹倾角下,裂纹间距与裂纹长度比值越小,2 条裂纹尖端的塑性区半径越大,塑性区扩展速度越快,直至塑性区发生接触,裂纹内间距全部屈服。且不同的裂纹倾角,裂纹尖端塑性区发生接触的条件也不一样。我国现行规范 GB/T19624—2004《在用含缺陷压力容器安全评定》中关于共面双穿通裂纹的合并条件偏安全,具体的 2 条裂纹合并条件需要根据其裂纹倾角来确定。

d. 本文主要是对目前理论研究成果的总结,关于后续数值模拟验证结果将在后续研究中报道。

参考文献:

- [1] 朱帝杰, 陈忠辉, 席婧仪, 等. 岩石平行偏置裂纹相互作用规律分析[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(2):235-243. (ZHU Dijie, CHEN Zhonghui, XI Jingyi, et al. Interaction between offset parallel cracks in rock[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 39(2):235-243. (in Chinese))
- [2] 石路杨, 余天堂. 多裂纹扩展的扩展有限元法分析[J]. 岩土力学, 2014, 38(1):263-272. (SHI Luyang, YU Tiantang. Analysis of multiple crack growth using extended finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 38(1):263-272. (in Chinese))
- [3] 周小平, 杨海清, 董捷. 压应力状态下多裂纹扩展过程数值模拟[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(2):192-197. (ZHOU Xiaoping, YANG Haiqing, DONG Jie. Numerical simulation of multiple-crack growth under compressive loads[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(2):192-197. (in Chinese))
- [4] 陈小翠, 杜成斌, 江守燕. 基于 XFEM 的主次裂纹间应力强度因子相互作用[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2014, 42(4):327-331. (CHEN Xiaocui, DU Chengbin, JIANG Shouyan. Study of interaction between stress intensity factors of main and secondary cracks based on XFEM[J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2014, 42(4):327-331. (in Chinese))
- [5] HAERI H, SHAHRIAR K, MARJI M F, et al. Cracks coalescence mechanism and cracks propagation paths in rock-like specimens containing pre-existing random cracks under compression[J]. Journal of Central South University, 2014, 21(6):2404-2414.
- [6] CAO P, LIU T, PU C, et al. Crack propagation and coalescence of brittle rock-like specimens with pre-existing cracks in compression[J]. Engineering Geology, 2015, 187:113-121.
- [7] IRWIN G R. Fracture dynamics[C]//ASTM STP. Fracturing of metals seminar. Chicago: American Society for Metals, 1948: 147-166.
- [8] IRWIN G R, KIES J A, SMITH H L. Fracture strengths relative to onset and arrest of crack propagation[J]. Proceedings of the American Society for Testing Materials, 1958, 58:551-589.
- [9] IRWIN G R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate[J]. Journal of Applied Mechanics, 1957, 24:361-364.
- [10] 李世愚, 和泰名, 尹祥础. 岩石断裂力学[M]. 北京: 科学出版社, 2015:11-29.
- [11] SWIFT T. Damage tolerance capacity[J]. International Journal of Fatigue, 1994, 16(1):75-94.
- [12] KACHANOV M. Elastic solids with many cracks; a simple method of analysis[J]. International Journal of Solids and Structures, 1987, 23(1):23-43.
- [13] KACHANOV M. Elastic solids with many cracks and relate problems[J]. Advances in Applied Mechanics, 1993, 30:259-445.
- [14] 席婧仪, 陈忠辉, 朱帝杰, 等. 岩石不等长裂纹应力强度因子及起裂规律研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(4):727-733. (XI Jingyi, CHEN Zhonghui, ZHU Dijie, et al. Stress intensity factors and initiation of unequal collinear cracks in rock[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(4):727-733. (in Chinese))
- [15] 张显余, 付长安. 断裂问题研究中裂尖塑性区的影响及处理原则[J]. 飞机设计, 2010, 30(1):34-37. (ZHANG Xianyu, FU Zhang'an. Effect of plastic zone around crack-tip and its criterion in fracture analysis[J]. Aircraft Design, 2010, 30(1):34-37. (in Chinese))
- [16] OCHI Y, ISHII A, SASAKI S K. An experimental and statistical investigation of surface fatigue crack initiation and growth[J]. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 1985, 8(4):327-339.