

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2019.04.013

基于比例边界有限元法的 Lamb 波在板中传播的模拟分析

杜成斌,何晓宇,李欣竹

(河海大学力学与材料学院,江苏 南京 211100)

摘要: 基于比例边界有限元法对 Lamb 波在板中遇到多裂纹、内置竖向和横向裂纹以及凹陷时的传播行为进行模拟,在入射波模态为 S_0 和 A_0 这 2 种情况下,改变内置裂纹的开裂角与深度、凹陷的弧度,对反射波的模态振幅进行分析。研究表明,在同一薄板上,不同的裂纹形态对于波形的增幅有所不同。反射波的模态振幅随着裂纹深度与开裂角的增大基本呈增大趋势,Lamb 波的激发模态为 A_0 时,随着板中内置裂纹开裂角的增大,反射波模态振幅的增大效果与激发模态为 S_0 时相比更为明显。当激发的入射波模态为 S_0 时,反射波中的模态振幅随着板上凹陷的减缓,减小幅度更大。
关键词: 比例边界有限元;Lamb 波;薄板;裂纹;凹陷;模态振幅
中图分类号: TB301 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1980(2019)04-0374-07

Simulation of Lamb wave propagation in plate based on the scaled boundary finite element method

DU Chengbin, HE Xiaoyu, LI Xinzhu

(College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 211100, China)

Abstract: Based on the scaled boundary finite element method, the propagation behavior of Lamb waves in a plate encountering multiple cracks, built-in vertical and transverse cracks, and depression was simulated. Different cracking angles, depths of the built-in crack and curvatures of pit were simulated under the A_0 and S_0 excitation mode, in which the mode amplitude of the reflected wave were analyzed. On the same plate, different crack pattern will have different increment for the waveform. The mode amplitude of the reflected wave increases with the increase of the crack depth and the crack angle. As the cracking angle of built-in crack increases, the effect of the mode amplitude in reflected waves is more obvious when the excited mode is antisymmetric A_0 mode. The mode amplitude in the reflected wave decreases as the depression on the plate slows down, which is more obvious when the excited mode is symmetric S_0 mode.

Key words: scaled boundary finite element method; Lamb waves; thin plate; cracks; pit; mode amplitude

Lamb 波是纵波和横波在板中传播时与板的上、下表面发生多次反射、波形相互耦合之后形成的特殊形式的应力波^[1]。作为板状结构中传播的超声导波,Lamb 波在遇到板中的缺陷时,会发生散射、反射和透射现象^[2],具有传播衰减小、检测效率高等特点,被应用于薄板结构的无损检测和结构安全检测中^[3-5]。Lamb 波在传播中会出现多个模态,这些模态可以根据板中质点振动的相位关系分为对称模态和反对称模态 2 类。

基金项目: 国家自然科学基金(51579084);江苏省科技计划(BE2017167);中央高校基本科研业务费专项(2018B48514)
作者简介: 杜成斌(1965—),男,教授,博士,主要从事工程力学问题研究。E-mail:cbdu@hhu.edu.cn
引用本文: 杜成斌,何晓宇,李欣竹. 基于比例边界有限元法的 Lamb 波在板中传播的模拟分析[J]. 河海大学学报(自然科学版),2019,47(4):374-380.
DU Chengbin, HE Xiaoyu, LI Xinzhu. Simulation of Lamb wave propagation in plate based on the scaled boundary finite element method[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences),2019,47(4):374-380.

在检测时选取一定频厚积(即波的频率与板厚的乘积)下的合适模态的 Lamb 波,能够减少传播过程中产生的模态数目,提升检测的精确度与效率。对 Lamb 波在缺陷板中的传播行为进行模拟能够给无损检测的实施提供一定的参考。有限元法已被广泛应用于 Lamb 波的传播模拟中^[6-8],当缺陷相对于整体结构较小,在模拟时需要划分较密的网格,增加了计算成本^[9]。边界元法也被应用于缺陷板中的 Lamb 波传播模拟中^[10],但因为求解过程中需要基本解,在一定程度上限制了边界元法对复杂问题的求解。

Wolf 等^[11]和 Song 等^[12]在研究无限域问题时提出的比例边界有限元法(scaled boundary finite element method, SBFEM)结合了有限元法和边界元法的优点。比例边界有限元与边界元一样,只需要对边界进行离散,将计算的维度降低了一维^[13],但比例边界有限元不需要事先给定研究域的可行解。比例边界有限元在环向(边界)的离散化与有限元类似,具有有限元法的精度,在径向是解析的,相比常规有限元在计算时更有优势。相对于其他数值解法,比例边界有限元法可以在没有网格细化的情况下准确描述裂纹尖端或拐角处的应力奇异性,更适合模拟孔洞、裂纹等不规则形状^[14]。

本文采用比例边界有限元法模拟 Lamb 波在有缺陷的板中的传播,对波的传播行为进行分析。对比单、双裂纹板中传播的 Lamb 波在同一观测点的波形变化,总结反射波中的模态振幅在内置竖向裂纹板与内置横向裂纹板中随着裂纹开裂角与深度增大时的变化规律,并且对比入射模态为 S_0 模态和 A_0 模态时, Lamb 波对于裂纹及凹陷变化的敏感性。

1 比例边界有限元法

如图 1 所示,在比例边界坐标系 (ξ, η) 中, ξ 为径向坐标, η 为环向坐标。在比例边界有限元中需要设置比例中心,子域内的任意一点对比例中心可见。裂纹所在子域的比例中心需要放置在裂纹尖端并且可见子域内的任意一点,裂纹面通过相应节点沿比例中心缩放形成,不需要进行离散处理。在比例中心径向坐标 $\xi=0$,在边界上 $\xi=1$ 。环向坐标 η 在子域的边界沿比例中心逆时针设置。子域中的任意一点在笛卡尔坐标系的坐标 (x, y) 可以由 ξ 和 η 表示^[9]:

$$x = \xi N(\eta) \mathbf{x}$$
 (1)

$$y = \xi N(\eta) \mathbf{y}$$
 (2)

式中: $N(\eta)$ ——形函数矩阵; $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ——节点坐标集。

比例边界有限元在径向上是解析的,只需要对每个子域的边界进行离散。式(1)、式(2)中坐标形函数与有限元中的形函数类似,但只与环向坐标 η 有关。

位移场:

$$\mathbf{u}(\eta, \xi) = N(\eta) \mathbf{u}(\xi)$$
 (3)

式中: $\mathbf{u}(\xi)$ ——边界上的节点位移,以 ξ 为变量。

二维情况下比例边界有限元法的动力学平衡方程^[9]如下:

$$\mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi\xi} + (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T) \xi \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} - \mathbf{E}_2 \mathbf{u}(\xi) + \omega^2 \xi^2 \mathbf{M}_0 \mathbf{u}(\xi) = 0$$
 (4)

式中: $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ ——系数矩阵; $\mathbf{M}_0$ ——质量矩阵; ω ——荷载频率。

式(4)可以演变为变量 ξ, ω 的常微分方程,引入动力刚度矩阵 $\mathbf{S}(\omega, \xi)$,得到采用动力刚度矩阵描述的平衡方程^[15]:

$$(\mathbf{S}(\omega, \xi) - \xi \mathbf{E}_1)(\xi \mathbf{E}_0)^{-1}(\mathbf{S}(\omega, \xi) - \xi \mathbf{E}_1^T) - \xi \mathbf{E}_2 + \omega \mathbf{S}(\omega, \xi)_{,\omega} + \omega^2 \xi^3 \mathbf{M}_0 = 0$$
 (5)

在边界($\xi=1$),动力刚度矩阵可以表示为静力刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 、质量矩阵 $\mathbf{M}$ 以及高阶项的组合^[16],参见文献[17]引入辅助变量 $\mathbf{X}_i$ 改进连分式,能够在一定程度上提高计算结果的稳定性。

时域中的运动方程如下:

$$\mathbf{K}_h \mathbf{z} + \mathbf{M}_h \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}$$
 (6)

其中

$$\mathbf{K}_h = \text{diag}(\mathbf{K}, \mathbf{S}_{0(1)}, \mathbf{S}_{0(2)}, \cdots, \mathbf{S}_{0(M_{ef})})$$

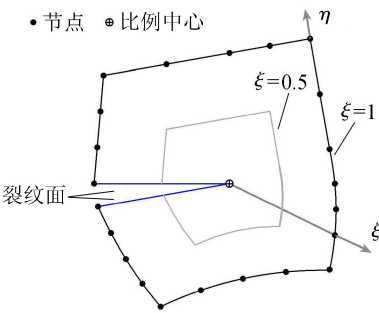


图 1 比例边界有限元子域示意图

Fig. 1 Subdomain in the scaled boundary finite element method

$$\mathbf{M}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{X}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{X}_1^T & \mathbf{S}_{1(1)} & -\mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{X}_2 & \mathbf{S}_{1(2)} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{X}_{M_{cf}^{-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_{M_{cf}^{-1}}^T & \mathbf{S}_{1(M_{cf}^{-1})} & -\mathbf{X}_{M_{cf}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_{M_{cf}}^T & \mathbf{S}_{1(M_{cf})} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{z} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{M_{cf}}]^T$$
$$\mathbf{f} = [\mathbf{R} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}]^T$$

式中: $\mathbf{S}_{0(i)}$ 、 $\mathbf{S}_{1(i)}$ ($i=1,2,\cdots,M_{cf}$)——高频行为的校正项^[16]; $\mathbf{u}$ ——边界上的节点位移; $\mathbf{R}$ ——边界上的牵引力; $\mathbf{u}_i$ ($i=1,2,\cdots,M_{cf}$)——与高阶项相关的辅助变量。

式(6)可以用 Newmark 时间积分方法进行求解。

2 数值算例

2.1 单裂纹板

Lamb 波在均质的板中传播,波群速度随着频厚积的变化而变化,并且存在多个模态,模态分为对称模态和反对称模态,分别用 S_0 、 S_1 和 A_0 、 A_1 表示。当材料参数弹性模量 $E=200\text{ GPa}$ 、泊松比 $\nu=0.3$ 、密度 $\rho=7.85\text{ g/cm}^3$, 并且板的边界条件设置为自由边界时,由 Raleigh-Lamb 频率特征方程^[2] 可求得对应的 Lamb 波群速度频散曲线,如图 2 所示,选择适当的频厚积可以控制 Lamb 波中具有传播能力的模态数目。这一材料参数及边界条件应用于本文的所有数值算例。

为了验证比例边界有限元法对 Lamb 波在板中传播模拟的准确性,选择长 12 mm、厚 2 mm 的二维均质板进行分析,并将比例边界有限元与有限元的分析结果进行对比。如图 3(a) 所示,在板的上表面 $x=6\text{ mm}$ 处设置 1 条深 1 mm、表面开口宽度为 $3.5\times10^{-7}\text{ mm}$ 的裂纹,观测点 A 设置在板的下表面 $x=6\text{ mm}$ 处,在板的最左端给予 1 个均匀分布的脉冲荷载激发 Lamb 波。脉冲荷载计算式如下:

$$P(t) = \sin(2\pi ft) e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2} \tag{7}$$

式中: μ 、 σ ——与时间相关的参数, $\mu=6\text{ }\mu\text{s}$, $\sigma=2\text{ }\mu\text{s}$; f ——频率, $f=0.6\text{ MHz}$ 。此时频厚积为 $1.2\text{ MHz}\cdot\text{mm}$, 根据图 2, Lamb 波中只有 S_0 和 A_0 这 2 种模态的波具有传播能力。以下所有算例均采用这一脉冲荷载。

比例边界有限元计算时,裂纹所在子域的网格划分如图 3(b) 所示,比例中心设置在裂纹尖端,并且对子域内的任意一点可见,裂纹子域划分为 6 个线单元,均由积分插值节点组成,裂纹面不需要作为边界进行离散处理。

计算时间间隔为 $0.03\text{ }\mu\text{s}$ 、1 500 个时间步传到点 A 的波的 y 方向的位移,见图 4。该裂纹板在 ABAQUS 中采用四边形网格划分为 2 400 个单元、2 562 个节点进行计算,在裂纹面需要进行离散处理。在用比例边界有限元进行计算时,将裂纹板划分为 3 个子域来进行计算,共有 63 个节点。相应的位移随时间的变化曲线如图 4 所示,比例边界有限元法与有限元法的计算结果具有良好的一致性。

在有限元中,当裂纹的长度或开裂角发生改变时,需要对网格进行重划分。而在比例边界有限元中,可

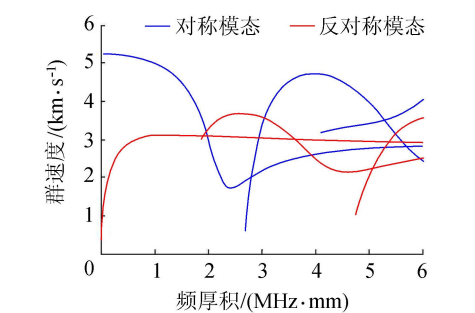


图 2 群速度频散曲线

Fig. 2 Dispersion curve of group velocity

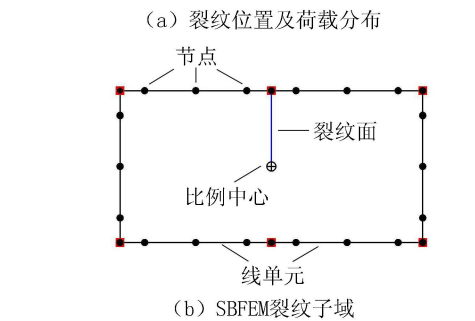
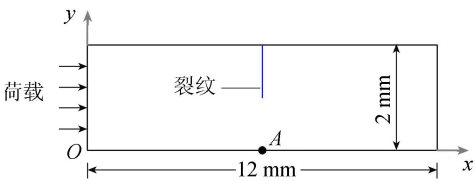


图 3 裂纹板示意图

Fig. 3 Diagram of crack in the crack plate and load distribution

以通过改变裂纹所在子域的比例中心的位置对裂纹进行改变,一定程度上减少了需要进行重划分的网格数量,提升了计算效率,在对裂纹结构的模拟计算中具有一定的优势。

2.2 单裂纹板和双裂纹板

选择 1 块长 300 mm、厚 2 mm 的二维均质板进行分析,在板上表面 $x_1=150\text{ mm}$ 处设置 1 个开口裂纹,上表面 $x_0=80\text{ mm}$ 处为观测点 A,裂纹位置与板所受荷载如图 5(a)所示,由于施加的荷载对称,所以激发出 S_0 模态的波。裂纹所在子域如图 5(b)所示,比例中心放置在裂纹尖端,并且对子域内的任意一点可见,裂纹的开裂角 $\alpha=5^\circ$,裂纹深度 $d=1\text{ mm}$ 。

当 Lamb 波在板中传播,到裂纹处发生反射,反射回的波到达板的左边界之前,在裂纹左端的板上可以得到完整的反射信号。从激发出入射波开始计时, $t=48\text{ }\mu\text{s}$ 时满足上述条件。选取这一时刻裂纹左端(板长 $x=0\sim150\text{ mm}$ 处)的板进行分析,板的下表面 $x=0\sim150\text{ mm}$ 处 y 方向的位移如图 6(a)所示。图 6(a)中的数值经过空间傅里叶变换,得到与波数 k 相关的振幅变化曲线,如图 6(b)所示。反射信号中包含了 2 种模态的波,对应的波数分别为 $k=0.769\text{ mm}^{-1}$ 和 $k=1.605\text{ mm}^{-1}$,与同一频率下 S_0 模态和 A_0 模态的波数理论值 $k_{S_0}=0.727\text{ mm}^{-1}$ 和 $k_{A_0}=1.559\text{ mm}^{-1}$ 相差不大,可知 S_0 模态的波传播到裂纹处,反射回 S_0 模态和 A_0 模态的波。

在单裂纹板的上表面 $x_2=190\text{ mm}$ 处增加 1 条向上的开口裂纹,裂纹的开裂角 $\alpha=5^\circ$,裂纹深度 $d=1\text{ mm}$ 。在观测点 A,将模拟所得的波 y 方向的位移随时间的变化曲线与只有单个裂纹时的位移变化曲线进行比较,如图 7(a)所示。在同一观测点上,单、双裂纹板中的波形存在差异,板上增加的裂纹导致传播回观测点的波在一定时段后有所增加。将双裂纹板在 x_2 处的裂纹设置为下表面的开口裂纹,比较传到观测点 A 的波 y 方向的位移变化曲线,如图 7(b)所示。当裂纹的开口方向不同,传播回观测点的波的增加量也会有所不同。

Lamb 波在裂纹板中传播,当裂纹数目与开口方向发生改变,在同一观测点检测到的波形也会发生相应的变化,裂纹的增加会增加传播回观测点的波,但波的增量随着裂纹的形态改变会有所不同。

2.3 内置竖向裂纹板和内置横向裂纹板

选择 1 块长 180 mm、厚 2 mm 的二维均质板进行分析,板的尺寸及施加的荷载如图 8(a)所示。在 $x=90\text{ mm}$ 处设置 1 条竖向裂纹在板的中间,如图 8(b)所示,在裂纹所在位置划分出上、下 2 个子域,子域的比例中心分别设置在裂纹的 2 个尖端,裂纹深度和开裂角分别由 d 和 α 表示。

脉冲荷载激发出的波在板中传播,遇到裂纹时发生反射。裂纹深度与板厚的比值定义为裂纹相对深度 D ,反射波中 S_0 模态与 A_0 模态的相对模态振幅 R_{S_0} 、 R_{A_0} 定义如下:

$$R_{S_0}=\frac{A_{S_0,r}}{A_1}$$

(8)

$$R_{A_0}=\frac{A_{A_0,r}}{A_1}$$

(9)

式中: A_1 ——入射波模态的最大振幅; $A_{S_0,r}$ 、 $A_{A_0,r}$ ——反射波中 S_0 模态、 A_0 模态的最大振幅。

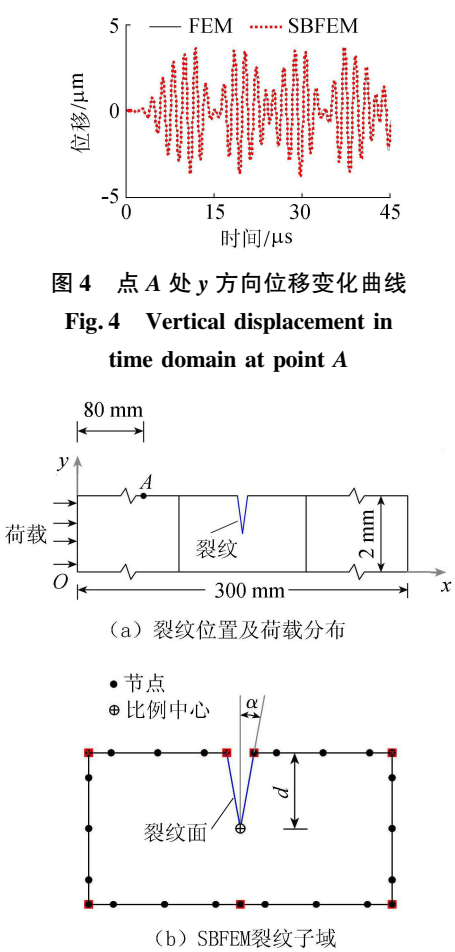


图 5 单裂纹板示意图
Fig. 5 Diagram of crack in single crack plate and load distribution

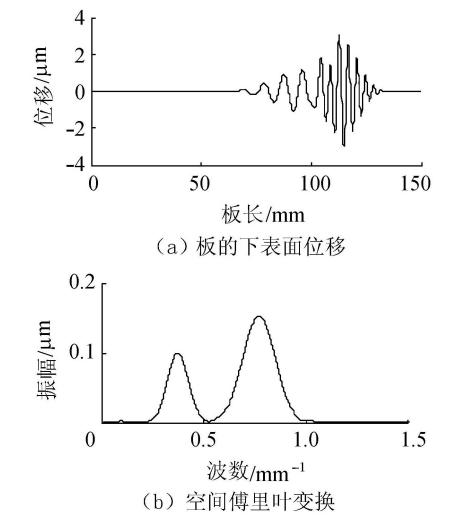


图 6 $t=48\text{ }\mu\text{s}$ 时板的表面位移分析
Fig. 6 Displacement analysis on the plate surface at time $t=48\text{ }\mu\text{s}$

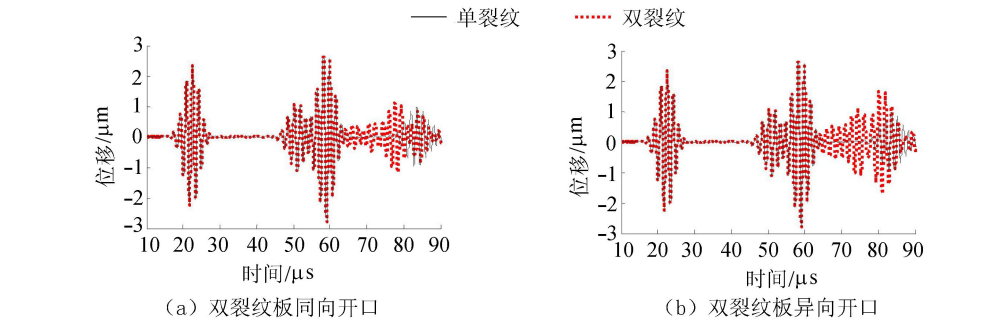


图7 单、双裂纹板点A处y方向位移变化曲线

Fig.7 Vertical displacement in time domain at point A in plates with different cracks

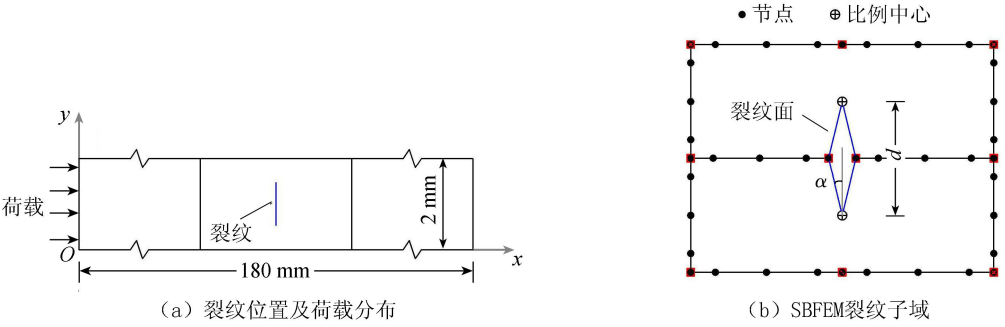


图8 内置竖向裂纹板示意图

Fig.8 Diagram of crack and load distribution in the plate with vertical built-in crack

在板的左边界施加对称的荷载,激发出 S_0 模态的波,由于结构对称,反射回的波仍为 S_0 模态。在开裂角 α 为 0° 、 15° 、 30° 以及 45° 时,将裂纹的相对深度由 0.1 至 0.8 逐渐增大,得到不同开裂角下反射波中的相对模态振幅随裂纹深度的变化曲线,如图 9(a) 所示。随着裂纹深度的增大,反射波中的模态振幅也随之增大。在同一裂纹深度下,反射波中的模态振幅随着开裂角的增大而增大,在开裂角为 0° 时最小,开裂角为 45° 时最大,但增长幅度相对较小。

在板左边界施加反对称的荷载,激发出 A_0 模态的波,反射回的波也为 A_0 模态,反射波中的相对模态振幅变化曲线如图 9(b) 所示。反射波中的模态振幅随着裂纹深度与开裂角的增大而增大,基本规律与激发模态为 S_0 时相似,但随着开裂角的增大,反射波中模态振幅的增大更明显,所以与 S_0 模态的波相比, A_0 模态的波在含有内置纵向裂纹的板中传播,对于裂纹开裂角的变化更敏感。

将板中内置的竖向裂纹改为横向,在裂纹所在位置划分出左、右 2 个子域,子域的比例中心分别设置在裂纹的 2 个尖端。在 0° 到 45° 的 4 个不同的开裂角下,将裂纹的相对深度从 0.1 到 0.8 逐渐增大,得到不同开裂角下反射波中的相对模态振幅随着裂纹深度的变化曲线。

由于结构对称,反射波的模态没有发生变化,当激发的入射波模态为 S_0 时,反射波的相对模态振幅变化曲线如图 10(a) 所示。在开裂角为 0° 时反射波对应的模态振幅很小,并且随着裂纹深度的增加趋于紊乱。当激发模态为 A_0 时,反射波的相对模态振幅变化曲线如图 10(b) 所示。与入射波为 S_0 模态时相比,此时反射回的模态振幅随着裂纹深度与开裂角的增大而增大,并且随着开裂角的增大,反射波的相对模态振幅增长显著,对于裂纹开裂角的变化更敏感。

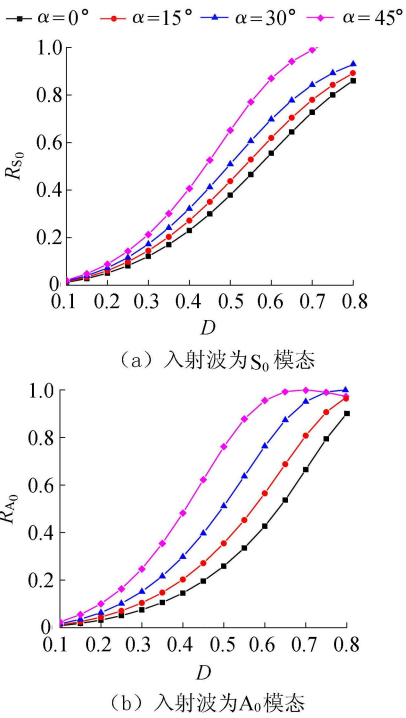


图9 反射波的相对模态振幅变化曲线

Fig.9 Curve of reflected mode amplitudes under different cracking angles

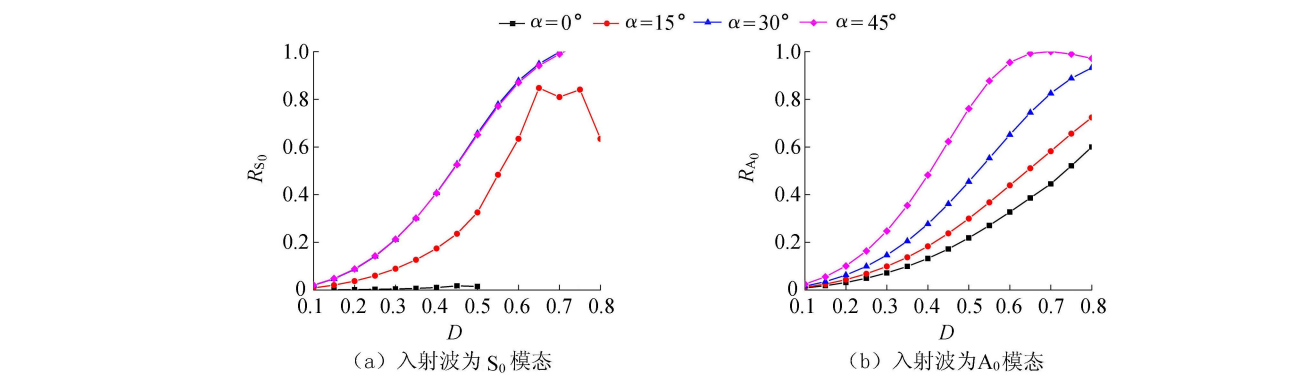


图 10 反射波的相对模式振幅变化曲线

Fig. 10 Curve of reflected mode amplitudes under different cracking angles

当激发模态为 A_0 时, Lamb 波对于板中内置裂纹的开裂角的变化更敏感,尤其是当内置裂纹为横向裂纹、入射波模态为 A_0 较之入射波模态为 S_0 时,对于裂纹深度和开裂角的变化为敏感。

2.4 外部光滑凹陷板

在 $180\text{ mm} \times 2\text{ mm}$ 的二维均质板的上表面 $x=90\text{ mm}$ 处设置 1 个凹陷,板的尺寸及凹陷所在子域如图 11 所示。凹陷是以板上方的点 A 为圆心,以 r 为半径的圆弧,弦长 $2a=1\text{ mm}$ 并且固定在板的上表面。凹陷部分由 6 个线单元表示,为了子域中的比例中心对子域内的任意一点具有更好的可见性,将凹陷部分划分为 2 个子域进行分析。当单一模态的 Lamb 波传播至凹陷处,反射回 S_0 和 A_0 这 2 种模态的波。

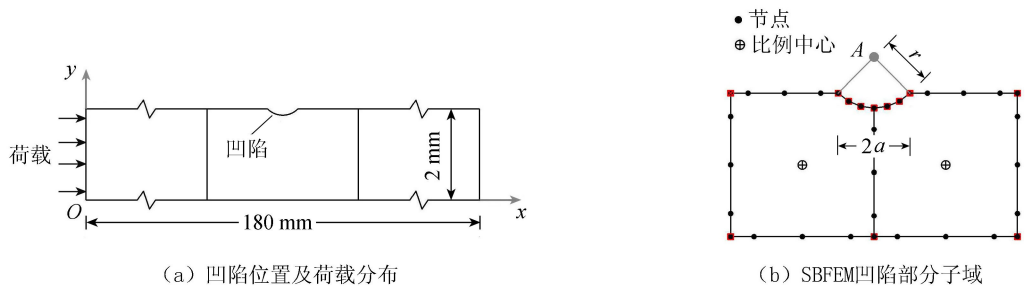


图 11 凹陷板示意图

Fig. 11 Diagram of pit in the pit plate and load distribution

取半径 $r \geq 0.5\text{ mm}$ 的缺陷板进行模拟,半径的增量为 0.1 mm ,分别列出入射波为 S_0 模态和 A_0 模态 2 种情况下凹陷反射回的波中的相对模式振幅,如表 1 所示。表 1 结果表明,随着凹陷幅度的减缓,反射波中的模式振幅随之减小。而当入射波为 S_0 模态时,反射回的波对于凹陷的变化更敏感。

3 结 论

- a. Lamb 波在裂纹板中传播,不同的裂纹数目与裂纹形态会对固定观测点上的波形产生影响,裂纹增加会导致传播回观测点的波在一定时段后有所增加,不同形态的裂纹对于观测点上波的增量存在差异。
- b. 在内置纵向和横向裂纹的板上,在入射波为单一的 S_0 模态和 A_0 模态时,反射波中的模式振幅随着裂纹深度的增大基本呈增大趋势。在同一裂纹深度下,开裂角为 0° 时反射波中的模式振幅最小,开裂角为 45° 时反射波的模式振幅最大。随着裂纹开裂角的增大,反射波中的模式振幅在一定范围内逐渐增大。
- c. Lamb 波的入射波模态为 A_0 时,对于板中内置裂纹的开裂角变化更敏感。在内置竖向裂纹和内置横

表 1 不同模态的入射波下反射波的相对模式振幅

Table 1 Reflected mode amplitudes under different incident waves				
r/mm	$R_{S_{01}}$	$R_{A_{01}}$	$R_{S_{02}}$	$R_{A_{02}}$
0.5	0.2072	0.3984	0.1019	0.0496
0.6	0.0821	0.2019	0.0525	0.0563
0.7	0.0576	0.1505	0.0394	0.0465
0.8	0.0449	0.1214	0.0319	0.0393
0.9	0.0368	0.1021	0.0269	0.0340
1.0	0.0313	0.0884	0.0234	0.0299
1.1	0.0272	0.0779	0.0207	0.0267
1.2	0.0241	0.0698	0.0186	0.0241

注: $R_{S_{01}}$ 和 $R_{A_{01}}$ 分别表示传播至凹陷的入射波为 S_0 模态时反射波中 S_0 模态和 A_0 模态的相对模式振幅, $R_{S_{02}}$ 和 $R_{A_{02}}$ 表示入射波为 A_0 模态时反射波中的相对模式振幅。

向裂纹的板中,反射波的相对模态振幅随着裂纹开裂角的增大,增长幅度更明显。入射波模态为 S_0 时,对于板上凹陷的变化更敏感,随着裂纹凹陷幅度的减缓,反射波模态振幅的减小趋势更明显。

致谢:本文研究得到了澳大利亚新南威尔士大学宋崇民(Song Chongmin)教授的关心和指导,作者在此谨表衷心的感谢!

参考文献:

[1] 刚铁, 刘强. 薄板结构中 Lamb 波的检测与仿真[J]. 无损检测, 2013, 35(7):24-28. (GANG Tie, LIU Qiang. Detection and simulation of the Lamb wave in thin plate structure[J]. Nondestructive Testing, 2013, 35(7):24-28. (in Chinese))

[2] 陈亮, 王恩报, 马豪, 等. 基于有限元方法的薄板超声 Lamb 波频散曲线计算[J]. 实验室研究与探索, 2014, 33(11):28-31. (CHEN Liang, WANG Enbao, MA Hao, et al. Calculation of ultrasonic Lamb wave dispersion curve of the thin plate by the finite element method[J]. Research and Exploration in Laboratory, 2014, 33(11):28-31. (in Chinese))

[3] SU Zhongqing, YE Lin, LU Ye. Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: a review[J]. Journal of Sound & Vibration, 2006, 295(3):753-780.

[4] 刘增华, 徐营赞, 何存富, 等. 板状结构中基于 Lamb 波单模态的缺陷成像试验研究[J]. 工程力学, 2014, 31(4):232-238. (LIU Zenghua, XU Yingzan, HE Cunfu, et al. Experimental study on defect imaging based on single Lamb wave mode in plate-like structures[J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(4):232-238. (in Chinese))

[5] 张骞, 孔正义, 吴涛, 等. 基于 Lamb 波的铝板无损检测方法试验研究[J]. 新型建筑材料, 2017, 44(9):146-149. (ZHANG Xian, KONG Zhengyi, WU Tao, et al. Experimental study on nondestructive detection method of aluminum sheet using Lamb waves[J]. New Building Materials, 2017, 44(9):146-149. (in Chinese))

[6] YANG Chunhui, YE Lin, SU Zhongqing, et al. Some aspects of numerical simulation for Lamb wave propagation in composite laminates[J]. Composite Structures, 2006, 75(1/2/3/4):267-275.

[7] 赵军辉, 魏勤, 袁媛, 等. Lamb 波检测板中裂纹的有限元模拟[J]. 压电与声光, 2013, 35(3):320-324. (ZHAO Junhui, WEI Qin, YUAN Yuan, et al. Finite element simulation of crack damage of a metal sheet with Lamb waves[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2013, 35(3):320-324. (in Chinese))

[8] 张博南, 霍宇森, 吴迪, 等. 钛合金薄板 Lamb 波检测的有限元分析[J]. 无损检测, 2015, 37(10):64-68. (ZHANG Bonan, HUO Yusen, WU Di, et al. Finite element analysis of testing of titanium alloy thin sheet using Lamb wave[J]. Nondestructive Testing, 2015, 37(10):64-68. (in Chinese))

[9] GRAVENKAMP H, PRAGER J, SAPUTRA A A, et al. The simulation of Lamb waves in a cracked plate using the scaled boundary finite element method[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2012, 132(3):1358.

[10] WANG Shen, HUANG Songling, ZHAO Wei. Simulation of Lamb wave's interactions with transverse internal defects in an elastic plate[J]. Ultrasonics, 2011, 51(4):432-440.

[11] WOLF J P, SONG Chongmin. Consistent infinitesimal finite-element cell method: in-plane motion[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1995, 123(1/2/3/4):355-370.

[12] SONG Chongmin, WOLF J P. Closure of "consistent infinitesimal finite-element-cell method: out-of-plane motion"[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1997, 123:95-96.

[13] WOLF J P, SONG Chongmin. The scaled boundary finite-element method—a primer: derivations[J]. Computers & Structures, 2000, 78(1):191-210.

[14] GRAVENKAMP H, BIRK C, SONG Chongmin. Simulation of elastic guided waves interacting with defects in arbitrarily long structures using the scaled boundary finite element method[J]. Journal of Computational Physics, 2015, 295(C):438-455.

[15] SONG Chongmin, WOLF J P. The scaled boundary finite-element method—alias consistent infinitesimal finite-element cell method—for elastodynamics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 1997, 147(3/4):329-355.

[16] SONG Chongmin. The scaled boundary finite element method in structural dynamics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 77(8):1139-1171.

[17] CHEN Denghong, BIRK C, SONG Chongmin, et al. A high-order approach for modelling transient wave propagation problems using the scaled boundary finite element method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2014, 97(13):937-959.