

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2019.04.015

Lemaitre 损伤模型的两 种数值算法及其对比

孙 晓 晓, 郭 小 明

(东南大学土木工程学院, 江苏 南京 210096)

摘要: 基于 Lemaitre 损伤模型, 采用 2 种简化的本构积分算法, 对三维应力状态下各向同性塑性损伤问题进行计算。利用 MATLAB 语言编写相应的求解程序, 分析不同应力状态下材料的损伤破坏过程, 对比 2 种算法的计算精度与计算效率。结果表明: 2 种本构积分算法的计算结果均与理论解一致, 能够适用于复杂应力状态下三维结构损伤与破坏分析; 相比于应力与损伤耦合更新的算法, 在增量步内将应力与损伤解耦更新的弱耦合算法可以更好地提高计算效率。

关键词: Lemaitre 损伤模型; 本构积分算法; 塑性; 三维模型; 韧性破坏

中图分类号: O346 文献标志码: A 文章编号: 1000-1980(2019)04-0387-06

Two numerical algorithms of Lemaitre damage model and the comparison

SUN Xiaoxiao, GUO Xiaoming

(School of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: In this paper, two kinds of simplified constitutive integral algorithm are adopted to solve the problem of isotropic plastic damage under three-dimensional stress state based on the Lemaitre damage model. The solving program compiled by the MATLAB was applied to analyze the failure process of materials under different stress states, and then, the accuracy and efficiency of two algorithms were compared. The numerical simulation shows that both the results of two integral algorithms agree well with theoretical solutions, and are capable to the analysis of damage and fracture of a three-dimensional structure under complex stress state. Compared to the updating algorithm that couples the stress and damage, the weak coupling algorithm that decoupling stress updating and damage in incremental step can better improve the computational efficiency.

Key words: Lemaitre damage model; constitutive integral algorithm; plasticity; three-dimensional model; ductile damage

材料损伤的本质是其中存在大量分布式的微裂纹以及微孔洞^[1-3], 这些初始缺陷在外界载荷的作用下不断扩展、交汇, 导致局部材料发生断裂, 最终使试件破坏^[4-8]。根据材料中微缺陷分布的特征, 通过连续介质力学的理论体系来研究材料性能劣化^[9-10], 将分布式的材料损伤用连续的损伤变量来表征, 认为材料是连续的但其性能受到损伤的影响, 这使得损伤问题可以在原有的非线性有限元理论中进行数值求解, 为材料损伤破坏问题的研究提供了便利。

Lemaitre 模型是在热力学框架内建立的材料损伤模型^[11], 适用于描述金属等韧性材料在塑性变形过程中的损伤演化, 通过选取合适的热力学势与耗散势, 可以导出损伤演化方程。该损伤模型的理论依据比较合理, 应用也十分广泛^[12-14]。自该模型建立至今, 已有很多学者对其数值求解算法进行研究, 并取得一定的成果。Benallal 等^[15]基于返回映射算法提出了针对 Lemaitre 弹塑性耦合损伤模型的本构积分算法, 可对完全耦合损伤的等向强化及随动强化的弹塑性模型进行求解。Singh 等^[16]将 Lemaitre 损伤模型简化为适用于平

基金项目: 国家自然科学基金(51478108)

作者简介: 孙晓晓(1990—), 男, 博士研究生, 主要从事多相复合材料损伤破坏研究。E-mail: 230169364@seu.edu.cn

通信作者: 郭小明, 教授。E-mail: xmguo@seu.edu.cn

引用本文: 孙晓晓, 郭小明. Lemaitre 损伤模型的两 种数值算法及其对比[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2019, 47(4): 387-392.

SUN Xiaoxiao, GUO Xiaoming. Two numerical algorithms of Lemaitre damage model and the comparison[J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2019, 47(4): 387-392.

面应力问题的算法,使其只需求解 3 个耦合的非线性方程。Vaz 等^[17]提出了两参数应力更新算法,将 Lemaitre 损伤模型的算法进一步简化。

本文利用经典的 Lemaitre 等向强化弹塑性损伤本构作为材料模型,以返回映射算法为基础,采用 2 种简化的应力更新算法对塑性材料的损伤演化过程进行数值模拟,分别为考虑增量步内损伤与应力耦合更新的算法(强耦合算法)以及增量步内应力与损伤解耦更新的算法(弱耦合算法)。根据以上 2 种算法在 MATLAB 环境中编写了相应的求解程序,用于三维应力状态下材料及结构的损伤分析,计算单轴拉伸试件的响应及损伤演化,并将其与理论解进行对比,同时对承受分布载荷的梁试件进行分析,以验证算法对于复杂应力状态的适用性。

1 Lemaitre 损伤模型及塑性损伤本构

根据热力学第一和第二定律以及相关试验现象,Lemaitre 等^[11]推导了金属材料的损伤演化方程:

$$\dot{D} = \frac{\bar{Y}}{S_0} \frac{\varepsilon_{pl}}{(1 - D)^{\alpha_0}} \tag{1}$$

其中

$$\bar{Y} = \frac{1}{2(1 - D)^2} \left[\frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})^2 \right]$$
$$\varepsilon_{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{p,ij} \varepsilon_{p,ij}}$$

式中: $\dot{D}$ ——损伤变化率; $\bar{Y}$ ——损伤能量释放率; $\boldsymbol{\sigma}$ ——柯西应力; $\text{tr} \boldsymbol{\sigma}$ ——柯西应力的迹; D ——损伤变量; ν ——材料的泊松比; E ——弹性模量; ε_{pl} ——累积塑性应变率; $\varepsilon_{p,ij}$ ——塑性应变分量变化率; S_0 、 α_0 ——材料参数。

损伤开始演化的准则为

$$\varepsilon_p \geq \kappa_0 \quad \varepsilon_{pl} > 0 \tag{2}$$

式中: κ_0 ——损伤所需的塑性变形门槛值; ε_p ——等效累积塑性应变。当等效累积塑性应变达到 κ_0 且 $\varepsilon_{pl}>0$ 时,损伤开始演化。

根据应变等效原理,即作用在损伤材料上的名义应力所产生的应变等于作用在相应无损材料上有效应力所产生的应变,材料的损伤本构方程为

$$\begin{cases} \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{1 - D} = \boldsymbol{D}_e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \\ \dot{D} = \frac{\sigma_{eq}^2 R_v \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}{2ES_0(1 - D)^{\alpha_0+2}} \end{cases} \tag{3}$$

式中: $\boldsymbol{D}_e$ ——弹性系数张量; $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ ——应变与塑性应变张量的变化率, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ 的表达式根据塑性流动法则在有效应力空间中确定; $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ——柯西应力的变化率; R_v ——应力三轴度; σ_{eq} ——Mises 等效应力。

2 Lemaitre 损伤模型的本构积分算法

以经典的返回映射算法为基础,针对线性等向强化材料的损伤问题推导简化的数值算法,在使用后退欧拉公式进行本构积分时,采用部分地考虑损伤变量在增量步内变化以及完全不考虑损伤变量在增量步内变化的方式,得到 2 种简化的本构积分算法,即强耦合及弱耦合本构积分算法,并对基于 Lemaitre 模型的损伤问题进行求解。

2.1 强耦合本构积分算法

强耦合本构积分算法的主要特点是,在采用后退欧拉公式进行积分时,试应力增量部分的损伤变量保持不变,只需求解一个非线性方程,在一定程度上提高了应力和损伤耦合更新的效率。

设已知第 n 增量步的迭代收敛解, $\boldsymbol{\sigma}_n$ 、 $\varepsilon_{p,n}$ 、 D_n 分别为第 n 增量步时材料的柯西应力、等效累积塑性应变以及损伤变量,而且已知第 $n+1$ 增量步内某次迭代后得到的应变增量 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ 。算法的具体步骤如下:

首先,计算试应力 $\boldsymbol{\sigma}_{tr}$ 为

$$\boldsymbol{\sigma}_{tr} = \boldsymbol{\sigma}_n + (1 - D_n) \boldsymbol{D}_e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4}$$

再根据材料当前的屈服面判断其是否进入塑性流动以及损伤演化过程,假设塑性与损伤行为同步发生,试屈服面函数 f_{tr} 为

$$f_{tr} = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{tr} : \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{tr}} - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_{y0} + H\varepsilon_{p,n}) \tag{5}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{tr} = \frac{\boldsymbol{S}_{tr}}{1 - D_n}$$

式中: σ_{y0} ——初始屈服应力; H ——材料的塑性模量; $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{tr}$ ——试有效漂移应力; $\boldsymbol{S}_{tr}$ ——试偏应力张量。

若 $f_{tr} \leq 0$,则材料没有进入塑性,保持在弹性状态,没有继续累积损伤,更新柯西应力、等效累积塑性应变以及损伤变量为

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{tr} \quad \varepsilon_{p,n+1} = \varepsilon_{p,n} \quad D_{n+1} = D_n \tag{6}$$

若 $f_{tr} > 0$,材料发生塑性变形与损伤,根据后退欧拉公式,积分得到柯西应力增量为

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = (1 - D_{n+1})\boldsymbol{D}_e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - (1 - D_{n+1})2\mu\hat{\gamma}\tilde{\boldsymbol{N}}_{n+1} \tag{7}$$

其中

$$D_{n+1} = D_n + \Delta D$$

式中: $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ ——柯西应力增量; D_{n+1} ——更新后的损伤变量; ΔD ——损伤增量; μ ——材料弹性剪切模量; $\hat{\gamma}$ ——塑性一致性参数; $\tilde{\boldsymbol{N}}_{n+1}$ ——更新后的单位方向张量。

为了简化算法,可将式(7)调整为

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \Delta \boldsymbol{\sigma}_{tr} - (1 - D_{n+1})2\mu\hat{\gamma}\tilde{\boldsymbol{N}}_{n+1} \tag{8}$$

式中: $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{tr}$ ——试应力增量。

由于试应力增量部分中损伤变量采用更新前的值进行计算,该表达式不再是一个完全的后退欧拉公式,但仍然考虑了应力更新过程中应力与损伤变量的耦合,因此,更新后柯西应力为

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{tr} - (1 - D_{n+1})2\mu\hat{\gamma}\tilde{\boldsymbol{N}}_{n+1} \tag{9}$$

式中的 D_{n+1} 、 $\hat{\gamma}$ 、 $\tilde{\boldsymbol{N}}_{n+1}$ 都是待求未知量。若可以将 D_{n+1} 、 $\hat{\gamma}$ 、 $\tilde{\boldsymbol{N}}_{n+1}$ 求出,就可以得到更新后的 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ 以及所有待更新的状态变量。

更新后的有效偏应力张量 $\tilde{\boldsymbol{S}}_{n+1}$ 的表达式为

$$\tilde{\boldsymbol{S}}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{S}}_{tr} - 2\mu\hat{\gamma}\tilde{\boldsymbol{N}}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{tr} - 2\mu\hat{\gamma}\tilde{\boldsymbol{N}}_{n+1} \tag{10}$$

式中: $\tilde{\boldsymbol{S}}_{tr}$ ——试有效偏应力张量; $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{tr}$ ——试有效漂移应力。

由于 $\tilde{\boldsymbol{S}}_{n+1}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{N}}_{n+1}$ 平行,因此 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{tr}$ 也和 $\tilde{\boldsymbol{N}}_{n+1}$ 平行,由此可以得到 $\tilde{\boldsymbol{N}}_{n+1}$ 的表达式为

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{n+1} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{tr}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{tr} : \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{tr}}} \tag{11}$$

又由于更新后的等效累积塑性应变为

$$\varepsilon_{p,n+1} = \varepsilon_{p,n} + \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\gamma} \tag{12}$$

根据塑性一致性条件,求出塑性一致性参数:

$$\hat{\gamma} = \frac{f_{tr}}{2\mu + \frac{2}{3}H} \tag{13}$$

将式(13)代入式(12)可以计算出更新后的等效累积塑性应变,而应力的更新与损伤变量的更新同步进行。令材料参数 $\alpha_0 = 0$ ^[18],利用后退欧拉公式,得到更新后损伤变量的表达式:

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\sigma_{eq,n+1}^2 R_{v,n+1} \Delta \varepsilon_p}{2ES_0(1 - D_{n+1})^2} \tag{14}$$

其中

$$\Delta \varepsilon_p = \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\gamma}$$

式中: $\Delta \varepsilon_p$ ——等效累积塑性应变增量; $\sigma_{eq,n+1}$ 、 $R_{v,n+1}$ ——更新后的 Mises 等效应力和应力三轴度。此时的 $\hat{\gamma}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{N}}_{n+1}$ 已求出,由式(9)可知,待更新的 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ 仅取决于未知量 D_{n+1} 。因此,式(14)中的 $\sigma_{eq,n+1}$ 和 $R_{v,n+1}$ 为 D_{n+1} 的函数,由式(9)和式(14)可以得到关于更新后损伤变量的求解方程:

$$-2ES_0(1-D_{n+1})^3 + \left[2ES_0(1-D_n) - 4\mu^2(1+\nu)\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\gamma}^3 \right](1-D_{n+1})^2 +$$
$$4\mu(1+\nu)\tilde{N}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}_{tr} \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\gamma}^2(1-D_{n+1}) - \left[(1+\nu)\boldsymbol{\sigma}_{tr} : \boldsymbol{\sigma}_{tr} - \nu(\text{tr}\boldsymbol{\sigma}_{tr})^2 \right] \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\gamma} = 0 \quad (15)$$

式中: $\text{tr}\boldsymbol{\sigma}_{tr}$ ——试应力张量的迹。

由该方程求出 D_{n+1} ,再代入式(9)就可以得到更新后的柯西应力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$,至此,所有待求状态变量都已更新。材料的雅克比矩阵根据此时的状态确定。

2.2 弱耦合本构积分算法

在该算法中,将增量步内的应力与损伤变量的更新解耦,认为增量步对应的时间步长较小时,损伤的变化对该增量步内应力、应变场的求解影响很小,可以忽略,待应力更新完成后,再更新损伤变量。

该算法中的试应力与试屈服面函数的表达式与强耦合算法相同。若 $f_{tr}<0$,根据式(6)更新状态变量;若 $f_{tr}>0$,更新后柯西应力为

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{tr} - (1-D_n)2\mu\hat{\gamma}\tilde{N}_{n+1} \quad (16)$$

式(16)中的柯西应力只决定于 $\hat{\gamma}$ 和 $\tilde{N}_{n+1}$,将 $\hat{\gamma}$ 和 $\tilde{N}_{n+1}$ 代入式(16)可得到更新后的柯西应力,同时由 $\hat{\gamma}$ 得到等效累积塑性应变。此时,更新损伤变量为

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\sigma_{eq,n+1}^2 R_{v,n+1} \Delta \varepsilon_p}{2ES_0(1-D_n)^2} \quad (17)$$

该算法的特点是更新应力时无需迭代求解损伤变量,提高了计算效率。

3 算法验证

利用以上2种算法对单轴拉伸试件的损伤演化进行数值模拟,并将结果与理论解进行对比。试件长度为20 mm,横截面为10 mm×10 mm的正方形,其一端固定,另一端承受准静态位移载荷作用,载荷作用于z方向正向,最大位移为1.5 mm。材料参数如下:弹性模量为204.0 GPa,泊松比为0.2,切线模量为10.2 GPa,初始屈服应力为550.0 MPa, $S_0=0.83$ MPa。模型如图1所示。

如图2所示,数值解与理论解一致,应力最大计算误差约为0.48%,说明了算法的准确性。损伤变量模拟结果对比如图3所示,数值模拟结果也与理论解一致,在接近计算结束时,损伤变量的误差达到最大,约为3.16%。这是因为此时材料的变形已经比较大,其损伤也接近临界断裂损伤(约0.23),损伤演化比较剧烈,而本文所采用2种本构积分算法均不是完全的后退欧拉公式,因此损伤梯度较大时,求解存在一定误差,但对于断裂前的大部分阶段,误差可以控制在可接受的范围内。对比图2与图3可以发现,损伤变量相对于应力对计算精度更敏感。

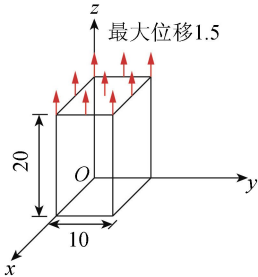


图1 单轴拉伸试件(单位:mm)
Fig.1 Uniaxial tension specimen(units:mm)

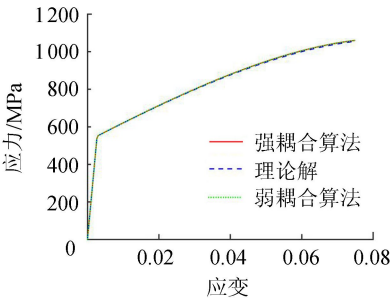


图2 单轴拉伸试件的应力-应变曲线

Fig.2 Relationship between stress and strain

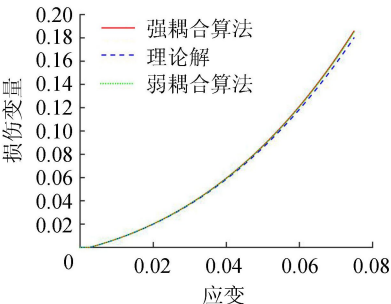


图3 应变-损伤变量曲线

Fig.3 Relationship between strain and damage

2种算法的CPU计算用时分别为:强耦合算法3.540 s,弱耦合算法1.652 s。弱耦合算法的CPU时间比强耦合算法省53.3%,而计算精度基本与强耦合算法相同。这说明尽管强耦合算法考虑了应力与损伤的耦合更新,但由于其在简化算法时没有采用完全的后退欧拉公式,导致后退欧拉公式原有的精度在一定程度上丧失,最终计算效果与弱耦合算法相同,也说明在增量迭代法的计算策略下弱耦合算法可以在保证计算精度

的同时大幅度提高计算效率。

4 算 法 应 用

综上所述,弱耦合算法更加实用,本文利用弱耦合算法计算金属梁试件损伤演化的过程。如图 4 所示,一端固接、另一端限制竖向位移的矩形截面梁承受均布循环载荷作用。试件中材料性能与之前相同。均布载荷的加载幅值 q 为 422.4 MPa,施加于试件顶面,加载时载荷由 0 增加至最大值 q ,再降低为 0,然后反向加载至 $-q$,最后卸载到 0。计算所得均布压力-试件跨中位移关系曲线如图 5 所示,卸载过程可以明显看出试件刚度的退化(为了展现卸载时的试件刚度退化,用无损模型作为对比)。试件的有限元模型如图 6 所示。试件中的损伤分布如图 7 所示,对应图 5 中的 $A \sim F$ 点。

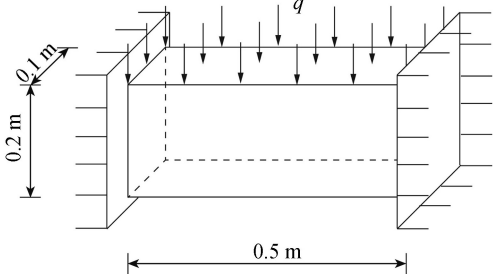


图 4 试件几何尺寸及加载示意图

Fig. 4 Size of specimen and load condition

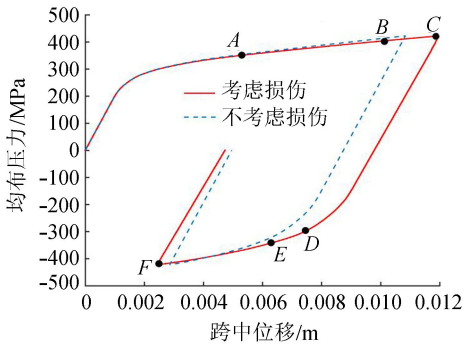


图 5 均布压力-试件跨中位移关系曲线

Fig. 5 Distributed pressure versus vertical displacement

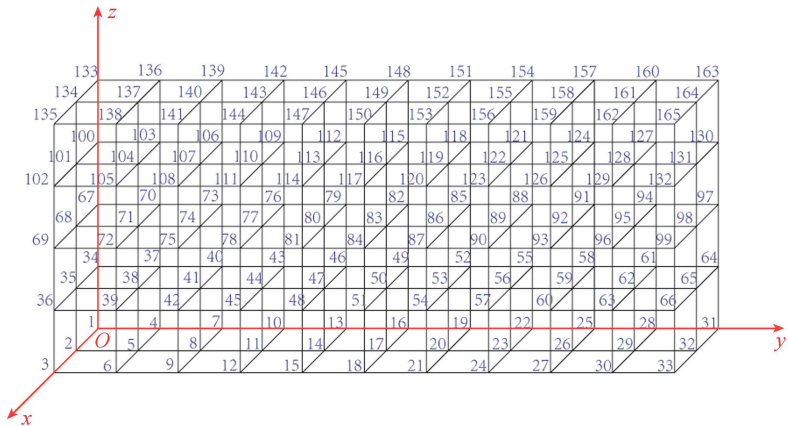


图 6 有限元模型

Fig. 6 Finite element model

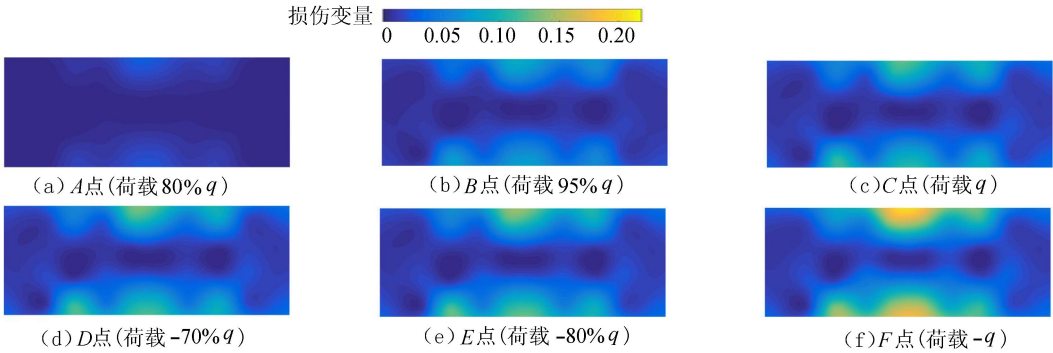


图 7 试件的损伤分布

Fig. 7 Damage distribution in the specimen

在弯曲载荷的作用下,试件中性轴附近的应力较低,因此损伤演化不明显,而在试件底部与试件顶部,由于弯曲正应力较高,损伤较为明显,而且跨中材料损伤最为明显,符合承受弯曲载荷的梁试件的损伤分布现

象。以上分析说明,Lemaitre 损伤模型及本文所采用的应力更新算法可以有效地分析复杂应力状态下材料的损伤演化过程。

5 结 论

a. 通过 MATLAB 语言编写了适用于三维应力状态的塑性损伤分析程序,计算结果与理论解一致,能够有效地分析复杂应力状态下材料的损伤与破坏。

b. 本文所采用的 2 种算法均能够有效预测试件的损伤破坏过程,2 种算法的计算精度基本相同,但弱耦合算法的计算效率更高。

c. 该 2 种算法对于金属结构及试件的损伤模拟具有良好的应用前景。

参考文献:

- [1] BAZANT Z P, PRAT P C. Microplane model for brittle-plastic material: I. theory[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988, 114(10): 1672-1688.
- [2] BAZANT Z P, PRAT P C. Microplane model for brittle-plastic material: II. verification[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988, 114(10): 1689-1702.
- [3] BAZANT Z P, OH B H. Microplane model for progressive fracture of concrete and rock[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1985, 111(4): 559-582.
- [4] RODRIGUES E A, MANZOLI O L, BITENCOURT L A, et al. 2D mesoscale model for concrete based on the use of interface element with a high aspect ratio[J]. International Journal of Solids and Structures, 2016, 94/95: 112-124.
- [5] SUN Bin, LI Zhaoxia. Adaptive concurrent multi-scale FEM for trans-scale damage evolution in heterogeneous concrete[J]. Computational Materials Science, 2015, 99: 262-273.
- [6] 姚婷, 杜成斌, 孙立国. 含缺陷混凝土细观损伤破坏过程的数值模拟[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2011, 39(1): 66-72. (YAO Ting, DU Chengbin, SUN Ligu. Numerical simulation of concrete mesoscopic damage and fracture with defects [J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences), 2011, 39(1): 66-72. (in Chinese))
- [7] 吴佰建, 李兆霞, 郭力. 模拟混凝土破坏过程的微裂纹模型及其应用[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2013, 43(5): 1034-1038. (WU Baijian, LI Zhaoxia, GUO Li. Micro-crack model for concrete rupture modeling and its applications[J]. Journal of Southeast University(Natural Sciences), 2013, 43(5): 1034-1038. (in Chinese))
- [8] GRASSL P, JIRASEK M. Meso-scale approach to modelling the fracture process zone of concrete subjected to uniaxial tension [J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(7/8): 957-968.
- [9] MA Huaifa, CHEN Houqun, YANG Changlu. Numerical tests of meso-scale damage mechanism for full graded concrete under complicated dynamic loads[J]. China Civil Engineering Journal, 2012, 45(7): 175-182.
- [10] 潘华, 邱洪兴. 基于损伤力学的混凝土疲劳损伤模型[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2006, 36(4): 605-608. (PAN Hua, QIU Hongxing. Fatigue model of concrete based on continuum damage mechanics[J]. Journal of Southeast University (Natural Sciences), 2006, 36(4): 605-608. (in Chinese))
- [11] LEMAITRE J, KRAJCINOVIC D. Continuum damage mechanics theory and applications[M]. New York: Springer, 1987.
- [12] LI Zhongyou, LIU Yuanxue. Coupled thermo-hygro-mechanical damage model for concrete subjected to high temperatures[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2012, 33(4): 465-482.
- [13] ANDRIOLLO T, THORBORG J, HATTEL J. Analytical solution to the 1D Lemaitre's isotropic damage model and plane stress projected implicit integration procedure[J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(11/12): 5759-5774.
- [14] LIU Y, DAI F. A damage constitutive model for intermittent jointed rocks under cyclic uniaxial compression[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2018, 103: 289-301.
- [15] BENALLAL A, BILLARDON R. An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations[J]. Communications in Applied Numerical Methods, 1988, 4(6): 731-740.
- [16] SINGH A K, PANDEY P C. An implicit integration algorithm for plane stress damage coupled elastoplasticity[J]. Mechanics Research Communications, 1999, 26(6): 693-700.
- [17] VAZ M, OWEN D R. Aspects of ductile fracture and adaptive mesh refinement in damaged elasto-plastic materials[J]. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(1): 29-54.
- [18] 李兆霞. 损伤力学及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.