

改进缩减基法在框架结构中的应用

李永红^{1,2}, 梁 振^{1,2}

(1. 中南林业科技大学土木工程学院, 湖南 长沙 410004;
2. 中南林业科技大学工程流变学湖南省重点实验室, 湖南 长沙 410004)

摘要: 针对缩减基法需预先知道设计参数与线弹性算子分离关系的问题, 基于求逆缩减基法, 提出一种求解与设计参数无关的线弹性算子的方法。该方法在离线阶段构建低维解空间, 无需预先知道设计参数与线弹性算子的关系, 选取不同的设计参数, 利用 ANSYS 提取需要的线弹性算子, 用求逆缩减基法解得与设计参数无关的线弹性算子。在线阶段代入新设计参数即可快速得到结构的计算结果。以平面框架结构为例, 将改进后的缩减基法结果与有限元结果进行比较, 表明该方法有很高的精度, 且扩大了传统缩减基法的应用范围。

关键词: 缩减基法; 求逆缩减基法; 线弹性算子; 离线阶段; 在线阶段; 平面框架

中图分类号: O342 **文献标志码:** A **文章编号:** 1006-7647(2021)06-0088-04

Application of improved reduced basis method in frame structures/LI Yonghong^{1,2}, LIANG Zhen^{1,2} (1. College of Civil Engineering, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410004, China; 2. Hunan Provincial Key Laboratory of Engineering Rheology, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410004, China)

Abstract: Aiming at the problem that the separation relationship between design parameters and linear elastic operators should be known in advance for the reduced basis method, a method based on inversion reduced basis method is proposed to solve linear elastic operators independent of design parameters. In the off-line stage, a low dimensional solution space is constructed without knowing the relationship between design parameters and linear elastic operators. Different design parameters are selected, and the linear elastic operators can be extracted from ANSYS software. The linear elastic matrix independent of design parameters is then solved by inversion reduced basis method. In the on-line stage, the calculation results can be obtained quickly when the new design parameters are selected. A planar frame structure was taken as an example, in which the results from the improved reduced basis method and the finite element method were compared, showing that the improved reduced basis method has high accuracy and the traditional application scope of reduced basis method is expanded.

Key words: reduced basis method; inversion reduced basis method; linear elastic operator; off-line stage; on-line stage; planar frame

许多工程实际问题常采用有限元法对结构进行分析。对结构进行优化设计时,需多次对结构进行分析,采用实时计算方法分析可以减少计算时间。缩减基法(reduced basis method, RBM)作为一种实时计算方法,在 20 世纪 70 年代被提出^[1],该方法可在全局范围内进行近似计算,并对计算结果的误差范围进行估计^[2]。整个计算过程可以分为离线阶段和在线阶段,离线阶段计算的量与设计参数无关,只需计算 1 次,可以先行计算完成。设计参数发生变化时,在线阶段可以快速得到缩减基法结果^[3]。近年来,缩减基法被用于各个领域。Jiang 等^[4]将缩

减基法运用于声学的多频分析中,对复杂声学散射等问题进行优化,提高了系统运行效率。Feng 等^[5]应用缩减基法求解多元材料在热荷载情况下的热响应值,确定了各设计参数最优解。Shi 等^[6]将缩减基法运用于电磁场中,把介质散射体参数化并对介质散射较强的电磁场高效建模,将其与边界元法结合,对系统进行快速计算。李永红等^[7]将求逆缩减基法用于车架结构分析,并对误差进行估计,计算量大大降低,结果也有很高的精度。张正等^[8-9]将缩减基法应用在区间结构的可靠性分析,对参数域的失效范围进行了快速求解;对减基空间的完备性也做

了研究,以向量子空间夹角大小来检查结构响应解的精确性。马营利等^[10]将线弹性算子中的部分参数显式化,把结构划分为敏感区和非敏感区,结合缩减基法实现了矿用车架的快速计算。

上述关于缩减基法的研究,需预先将设计参数从线弹性算子中分离出来。将线弹性算子分成多个与设计参数无关的矩阵,该步骤计算烦琐且不易求解,影响了缩减基法的应用。本文将对缩减基法进一步改进,结合 ANSYS 分析设计参数与结构单元之间的联系,分离线弹性算子中的设计参数,从而解决缩减基法应用瓶颈问题,同时将改进后的缩减基法应用到平面框架结构^[11-12]。

1 缩减基法理论及改进

1.1 缩减基法基本原理

结构进行求解时,与自身几何或者物理参数有关的结点位移组成高维解空间。缩减基法通过 Galerkin 映射,将解映射到低维解空间,在低维解空间拟合结果。

结构的平衡方程为如下形式:

$$\mathbf{K}(\mu)\mathbf{u}(\mu)=\mathbf{F} \quad \forall \mathbf{u}(\mu) \in \mathbf{X} \quad (1)$$

式中: μ 为结构的设计参数; $\mathbf{K}(\mu)$ 为结构刚度矩阵; $\mathbf{u}(\mu)$ 为结构的结点位移向量; $\mathbf{F}$ 为结构荷载向量; $\mathbf{X}$ 为真实的高维解空间。

对于大型复杂结构,求解式(1)会耗费大量时间。结构优化设计时,每一次设计参数变化都要求解上式。因此,能快速求解结构并得到高精度结果对于优化设计十分重要。

系统能量为

$$\mathbf{J}=\frac{1}{2}\mathbf{u}^T(\mu)\mathbf{K}(\mu)\mathbf{u}(\mu)-\mathbf{u}^T(\mu)\mathbf{F} \quad (2)$$

在设计参数变化范围内,选 M 组设计参数为样本参数,计算对应结构得到位移,组成的矩阵为

$$\mathbf{P}=[\mathbf{u}(\mu_1),\mathbf{u}(\mu_2),\cdots,\mathbf{u}(\mu_M)] \quad (3)$$

$\mathbf{P}$ 中的第 i 项设计参数对应的结构,可以用有限元法求出对应的位移 $\mathbf{u}(\mu_i)$ 。将这 N 组位移构成减基矩阵 $\mathbf{z}$,写成如下形式: $\mathbf{z}=[\mathbf{u}(\mu_1),\mathbf{u}(\mu_2),\cdots,\mathbf{u}(\mu_M)]$ 。 $\mathbf{z}$ 矩阵中的解向量 $\mathbf{u}(\mu_i)$ ($i=1,2,\cdots,M$) 是线性无关的,真实解 $\mathbf{X}$ 中各项可以用减基矩阵 $\mathbf{z}$ 中的元素线性表达。当取新的设计参数 μ_{new} 时,对应结构的位移可以看作是减基矩阵 $\mathbf{z}$ 中各项的线性组合,即

$$\mathbf{u}(\mu_{\text{new}})=\mathbf{za}(\mu_{\text{new}}) \quad (4)$$

式中: $\mathbf{a}(\mu_{\text{new}})$ 为系数向量。将式(4)代入式(2),系统能量可写成

$$\mathbf{J}=\frac{1}{2}(\mathbf{za}(\mu_{\text{new}}))^T\mathbf{K}(\mu_{\text{new}})\mathbf{za}(\mu_{\text{new}})-(\mathbf{za}(\mu_{\text{new}}))^T\mathbf{F} \quad (5)$$

由能量最小原理并结合式(5)可得到

$$\mathbf{z}^T\mathbf{K}(\mu_{\text{new}})\mathbf{za}(\mu_{\text{new}})=\mathbf{z}^T\mathbf{F} \quad (6)$$

令 $\mathbf{K}^N(\mu_{\text{new}})=\mathbf{z}^T\mathbf{K}(\mu_{\text{new}})\mathbf{z}$, $\mathbf{F}^N=\mathbf{z}^T\mathbf{F}$,式(6)可写成

$$\mathbf{K}^N(\mu_{\text{new}})\mathbf{a}(\mu_{\text{new}})=\mathbf{F}^N \quad (7)$$

当结构中的设计参数改变时,用缩减基法求解,可以转化为在低维的解空间求解式(7)。

对于线弹性问题,刚度矩阵 $\mathbf{K}(\mu)$ 可以分解成两部分,一部分与设计参数有关,另一部分与设计参数无关,表示为下列形式:

$$\mathbf{K}(\mu)=\sum_{q=1}^Q\sigma_q(\mu)\mathbf{K}_q \quad (8)$$

式中: $\sigma_q(\mu)$ 为从刚度矩阵中分离出来的与设计参数有关的函数关系; $\mathbf{K}_q$ 为刚度矩阵中与设计参数无关的矩阵; Q 为刚度矩阵中设计参数能够分离的项数,与求解的问题有关。

基于这种分解,缩减基法可以进行快速有效的实时计算。将式(8)代入式(6),可写成

$$(\sum_{q=1}^Q\sigma_q(\mu_{\text{new}})\mathbf{z}^T\mathbf{K}_q\mathbf{z})\mathbf{a}(\mu_{\text{new}})=\mathbf{z}^T\mathbf{F} \quad (9)$$

令 $\mathbf{K}_q^N=\mathbf{z}^T\mathbf{K}_q\mathbf{z}$ ($q=1,2,\cdots,Q$),式(9)可写成

$$(\sum_{q=1}^Q\sigma_q(\mu_{\text{new}})\mathbf{K}_q^N)\mathbf{a}(\mu_{\text{new}})=\mathbf{z}^T\mathbf{F} \quad (10)$$

将设计参数从刚度矩阵分离出来后, $\mathbf{K}_q^N$ 可以提前算好。在取新的设计参数时, $\sigma_q(\mu_{\text{new}})$ 容易计算,由式(10)可求得 $\mathbf{a}(\mu_{\text{new}})$ 。代入式(4),就可得到缩减基法对应的位移解。求解式(10)计算量远小于求解式(1)。所以,缩减基法可以降低计算量,提高计算效率。

1.2 缩减基法的参数分离

缩减基法将线弹性算子分离成与设计参数有关的部分和与设计参数无关的部分后,计算过程可分为离线阶段和在线阶段,但将设计参数从线弹性算子中分离并不容易实现。基于现有的研究基础和成果,采用 ANSYS 建模提取相关信息,对设计参数与结构线弹性矩阵的关系进行分析研究,通过计算得到与设计参数无关的线弹性算子。

设刚度矩阵可以分离成 Q 项与设计参数无关的项。选取 Q 组设计参数,得到对应结构的整体刚度矩阵 $\mathbf{K}(\mu_i)$,代入式(8),即 $\mathbf{K}(\mu_i)=\sum_{q=1}^Q\sigma_q(\mu_i)\mathbf{K}_q$,则 $\mathbf{z}^T\mathbf{K}(\mu_i)\mathbf{z}=\mathbf{z}^T(\sum_{q=1}^Q\sigma_q(\mu_i)\mathbf{K}_q)\mathbf{z}$ 。令 $\mathbf{K}^N(\mu_i)=\mathbf{z}^T\mathbf{K}(\mu_i)\mathbf{z}$,有 $\mathbf{K}^N(\mu_i)=\sum_{q=1}^Q\sigma_q(\mu_i)\mathbf{K}_q^N$,其展开式为

$$\sigma_1(\mu_i)\mathbf{K}_1^N+\cdots+\sigma_q(\mu_i)\mathbf{K}_q^N+\cdots+\sigma_Q(\mu_i)\mathbf{K}_Q^N=\mathbf{K}^N(\mu_i) \quad (i,q=1,2,\cdots,Q) \quad (11)$$

令 $K_{jl}^N(\mu_i)$ 是 $K^N(\mu_i)$ 的第 j 行第 l 列, K_{qil}^N 是 K_q^N 的第 j 行第 l 列, 则

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1(\mu_1) & \cdots & \sigma_Q(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1(\mu_Q) & \cdots & \sigma_Q(\mu_Q) \end{bmatrix} \tag{12}$$

表示 Q 组设计参数与 $K^N(\mu_i)$ 的关系式矩阵。

将之前选取的 Q 组设计参数代入 $\sigma_q(\mu_i)$, $K_{jl}^N(\mu_i)$ 和 K_{qil}^N 代入式(11), 有

$$K_{jl}^N(\mu_i) = CK_{qil}^N \tag{13}$$

由式(13)可得到

$$K_{qil}^N = C^{-1}K_{jl}^N(\mu_i) \tag{14}$$

从式(14)求解得到 K_{qil}^N , 各项都算出组成 K_q^N 。

在设计参数关系未知的情况下, 研究简单结构单元刚度矩阵, 分析其随设计参数的变化规律, 找出二者关系。选取 Q 组设计参数, 得到 C 矩阵及 Q 个 $K^N(\mu)$, 代入式(14)算出 K_{qil}^N , 集合成 K_q^N , 将 K_q^N 代入式(10)可求出系数向量 $a(\mu_{new})$, 从而求得结构应用改进缩减基法的位移解 $u_{GRBM}(\mu_{new})$ 。

K_q^N 计算流程可简述如下: ①分析所求结构的单元类型, 用 ANSYS 建立该单元类型的简单模型, 不断改变设计参数, 找出线弹性算子与设计参数的联系; ②选取多组设计参数, 在 ANSYS 中提取对应结构的整体刚度矩阵; ③用求逆缩减基法计算线弹性算子中与设计参数无关部分的方法, 计算得到 K_q^N 。需分析的复杂结构与简单结构单元类型相同, 线弹性算子与设计参数函数关系也相同, 第①步中从简单结构中找出的函数关系可以直接用于第②步。

2 数值算例

住宅楼和商住楼多采用框架结构。与砖混结构相比, 框架结构在抗拉、抗剪、切抗变形能力上有很大的优势, 有很好的刚度和强度, 牢固性比较强, 因此能抵抗外界环境发生变化所受的作用力(地震力、风荷载等)。以多层框架结构为例, 取其中的一榀平面框架结构进行分析, 用梁单元划分网格建立有限元模型, 如图 1 所示。该模型有 540 个单元, 521 个节点, 每个节点具有 3 个自由度, 整个结构共有 1563 个自由度。在第一排架柱作用集中力 N_1 , 对该种荷载情况进行分析, 如图 2 所示。框架结构模型的刚度矩阵与梁单元弹性模量 E 、截面面积 A 、截面惯性矩 I 、长度 l 、泊松比 ν 、厚度 h 有关, 且横梁和柱的组合形式也会引起刚度矩阵的变化。

该结构所选用的材料为钢筋混凝土材料, 泊松比为 0.2, 密度为 $2\,500\text{ kg/m}^3$ 。本例首先取梁单元组成的一简单结构进行分析, 如图 3 所示。利用

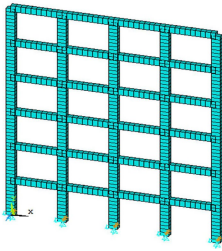


图 1 平面框架结构的有限元模型

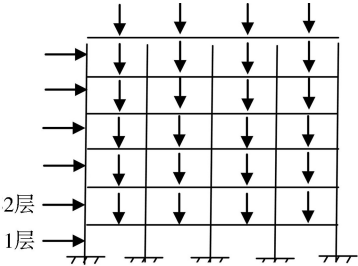


图 2 结构荷载情况

ANSYS 提取图 3 结构的刚度矩阵等相关信息, 对设计参数和刚度矩阵的变化进行分析, 将设计参数从刚度矩阵中分离出来。

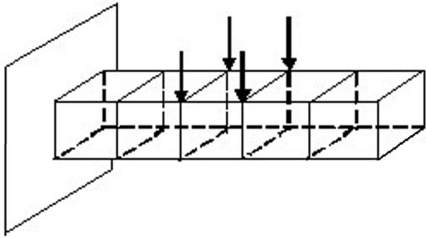


图 3 梁单元组成的简单结构模型

平面框架结构选取的设计参数变化范围如下: $E=3.0 \sim 4.5\text{ GPa}$, $A=0.09 \sim 0.36\text{ m}^2$, $I=0.24 \sim 0.96\text{ m}^4$, $l=0.2 \sim 0.6\text{ m}$ 。整个计算过程分成离线阶段和在线阶段。

离线阶段: 分析梁单元组成的简单结构。选取不同设计参数时, 利用 ANSYS 提取该简单结构的梁单元矩阵, 找出单元刚度矩阵与设计参数的变化关系为 $EA/l, EI/l, EI/l^2, EI/l^3$ 。针对图 1 中的平面框架结构, 整体刚度矩阵与设计参数的函数关系式与简单结构相同。在设计参数的变化范围内选取多组参数, 代入 $\sigma_q(\mu)$ 。由 ANSYS 可计算出不同设计参数时的整体矩阵, 求解低维解空间下的刚度矩阵, 再由方程组(13)得到 K_q^N 。

在线阶段: 选取新设计参数时, 算出 $\sigma_q(\mu_{new})$, 代入式(10)求得 $a(\mu_{new})$, 由式(4)求得应用改进缩减基法得到的位移解 $u_{GRBM}(\mu_{new})$ 。

为了验证改进缩减基法的计算精度, 任意选取新设计参数如表 1 所示, 采用有限元法求出位移结果 $u(\mu_{new})$, 令 $s(\mu_{new}) = Fu(\mu_{new})$; 用求逆缩减基法得到位移结果 $u_{GRBM}(\mu_{new})$, 令 $s'(\mu_{new}) =$

$Fu_{GRBM}(\mu_{new})$ 。按式(15)计算并比较计算精度, $\mu_1 \sim \mu_8$ 的误差 e 分别为 0.031、0.062、0.021、0.035、0.029、0.012、0.078、0.010。

$$e = \frac{s(\mu_{new}) - s'(\mu_{new})}{s(\mu_{new})}$$

(15)

表 1 设计参数选取

参数	E/GPa	A/(10 ⁻² m ²)	I/m ⁴	l/m
μ_1	3.00	9.00	0.24	0.20
μ_2	3.20	12.25	0.27	0.25
μ_3	3.50	16.00	0.32	0.30
μ_4	3.45	17.64	0.35	0.34
μ_5	3.80	20.25	0.38	0.36
μ_6	4.00	25.00	0.40	0.40
μ_7	4.38	30.25	0.46	0.48
μ_8	4.50	36.00	0.48	0.50

为更明确地检验改进缩减基法的计算精度,以有限元结果为精确解,将改进缩减基法各节点位移结果按照最小二乘法计算相对误差 $\varepsilon, \mu_1 \sim \mu_8$ 的相对误差分别为 0.043%、0.057%、0.039%、0.063%、0.031%、0.018%、0.059%、0.026%。

设计参数发生变化时,该算例用有限元方法做一次运算需 72s,用改进缩减基法计算,在在线阶段计算一次需要 0.0091 s,计算效率明显提升。在结构的设计和优化中,需要对结构进行多次分析,采用改进缩减基法优势明显。

3 结 语

本文对缩减基法进行了改进,经过分析所求结构单元组成的简单结构,得出该单元类型设计参数和线弹性算子的关系式。将多组设计参数对应的位移结果组成减基矩阵,采用改进缩减基法求出与设计参数无关的项。取新的设计参数时,可以实时得到与之对应的线弹性算子,并计算出结果。以一多层平面框架结构为例,验证了计算结果的精度。与之前的缩减基法相比,改进的缩减基法无需预先知道设计参数与线弹性算子的分离关系,以相同单元类型的简单结构为对象算出与设计参数无关的矩阵,为将缩减基法用到复杂结构提供了思路,对缩减基法的应用有重要的价值。

参考文献:

[1] ALMROTH B O, STERN P, BROGAN F A. Automatic choice of global shape functions in structural analysis[J]. AIAA Journal, 1978, 16(5): 525-528.

[2] PRUDHOMME C, ROVAS D, VEROY K, et al. Reliable real-time solution of parametrized partial differential equations: reduced-basis output bound methods[J]. Journal of Fluids Engineering, 2002, 124

(1):70-80.

[3] THOMAS B L. Reduced basis output bounds for linear elasticity: application to microtruss structures [D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2001.

[4] JIANG H B, ZHANG X, HUANG X. Reduced-basis boundary element method for efficient broadband acoustic simulation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 456:374-385.

[5] FENG S Z, HAN X, WANG G. An efficient on-line algorithm for the optimal design of multi-material structures under thermal loads[J]. International Journal of Thermal Sciences, 2018, 132:567-577.

[6] SHI Y T, CHEN X G, TAN Y Y, et al. Reduced-basis boundary element method for fast electromagnetic field computation[J]. J Opt Soc Am A Opt Image Sci Vis, 2017, 34(12): 2231-2242.

[7] 李永红, 侯淑娟, 李光耀. 基于求逆缩减基法的结构分析[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(13):3876-3879. (LI Yonghong, HOU Shujuan, LI Guangyao. Structural anlsysis based on inversion reduced-basis method [J]. Journal of System Simulation, 2009, 21(13):3876-3879. (in Chinese))

[8] 张正, 毕仁贵, 李剑. 一种分析区间参数结构可靠性的减基快速计算方法[J]. 计算力学学, 2017, 34(1): 76-80. (ZHANG Zheng, BI Rengui, LI Jian. A rapid reduced basis method for analysis of interval parameter structural reliability [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2017, 34 (1): 76-80 (in Chinese))

[9] 张正, 李剑, 曾钦. 结构静态响应完备减基空间的一种构建方法[J]. 中国机械工程, 2018, 29(13): 1519-1523. (ZHANG Zheng, LI Jian, ZENG Qin. A method building complete reduced space for structural static responses[J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29 (13): 1519-1523. (in Chinese))

[10] 马营利, 雷飞, 孙军, 等. 基于部分参数显式化格式的缩减基快速计算方法及应用[J]. 机械科学与技术, 2013, 32(7): 968-972. (MA Yingli, LEI Fei, SUN Jun, et al. A rapid computation method of reduced basis based on rartial explicit parameterized formulation and its application [J]. Mechanical Science and Technology, 2013, 32(7): 968-972. (in Chinese))

[11] 刘伯权, 苏佑智, 马煜东, 等. 多层多跨钢筋混凝土平面框架拟静力倒塌试验研究[J]. 土木工程学报, 2019, 52(8): 24-39. (LIU Boquan, SU Jizhi, MA Yudong, et al. Pseudo-static collapse experiment of multi-story multi-span reinforced concrete plane frames [J]. China Civil Engineering Journal, 2019, 52 (8): 24-39. (in Chinese))

[12] KAVEH A, HAMEDANI K B, HOSSEINI S M, et al. Optimal design of planar steel frame structures utilizing meta-heuristic optimization algorithms [J]. Structures, 2020, 25:335-346.

(收稿日期:2020 - 11 - 16 编辑:骆超)