

泄洪雾化水滴分档随机喷溅数学模型及其验证

张 华,何贵成

(华北电力大学水利与水电工程学院,北京 102206)

摘要:针对挑流泄洪雾化降雨强度数值模拟中,水滴随机喷溅数学模型的求解需要生成大量水滴,导致计算效率较低的问题,基于分档滴谱、代表性油滴和颗粒微团等粒子运动优化计算方法降低计算量的思想,提出分档水滴的概念,建立了水滴分档随机喷溅数学模型,并采用一个具有解析解的案例对该模型进行了验证计算。结果表明:1万个水滴的水滴分档随机喷溅数学模型的求解精度,非常接近100万个水滴的水滴随机喷溅数学模型的求解精度;水滴分档随机喷溅数学模型相比水滴随机喷溅数学模型具有很大的计算优势。

关键词:泄水建筑物水力学;泄洪雾化;随机喷溅模型;分档随机喷溅模型;分档水滴

中图分类号:TV135.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1006-7647(2022)01-0053-08

Mathematical model of graded random splashing droplets in flood discharge atomization and its verification//
ZHANG Hua, HE Guicheng (School of Water Resources and Hydropower Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

Abstract: In the numerical simulation of rainfall intensity for flood discharge atomization, mass production of water droplets needs to be generated during the solution of random droplets splashing mathematical model, which leads to the problem of low computational efficiency. Based on the academic ideas of particle motion optimization calculation methods, such as graded droplet spectrum, representative oil droplet and particle group, the concept of graded droplets was first proposed, and a graded random splashing droplets mathematical model was established. The effectiveness of the proposed model was verified by comparing with an example with an analytical solution. The comparison results show that the solution precision of the graded random droplets splashing mathematical model with 10,000 water droplets is very close to that of the random droplets splashing mathematical model with 1 million water droplets. It is shown that the graded random droplets splashing mathematical model is more advantages in calculation than the random droplets splashing mathematical model.

Key words: hydraulics of outlet structures; flood discharge atomization; random splashing model; graded random splashing model; graded droplets

水利工程在挑流泄洪时,产生的高速水舌与空气掺混^[1],两股水舌碰撞,以及水舌和下游水面的撞击,都会形成大小不一的雾源。雾源处喷溅的水滴,在坝下游沉降,产生强度远大于自然降雨的泄洪雾化降雨^[2-3]。严重的泄洪雾化会影响电站电气设备的正常运行、冲蚀地表,影响岸坡稳定和厂区分交通等^[4-5]。研究泄洪雾化的产生机理、雾源强度、扩散规律、以及降雨强度,对采取合理措施减轻泄洪雾化的危害具有重要价值^[6]。

泄洪雾化降雨范围和大小的计算,常用原型观测^[7]、理论分析^[8]、模型试验^[9]和数值模拟^[10-11]等方法。梁在潮^[12]详细描述了泄洪雾化现象,推导出

了水舌掺气量、溅水影响区域和雾流扩散的理论计算公式。刘宣烈等^[1]采用立体摄影和电阻式掺气仪两种测量方法,试验得到了水舌断面掺气浓度、沿程变化与参数的关系。张华等^[13]在观测与试验数据的基础上,提出了水滴随机喷溅数学模型,应用较为广泛^[14-16]。水滴随机喷溅数学模型在初始条件中采用多个随机变量以模拟水滴在雾源喷出时的随机特性,随机变量包括喷溅水滴的直径、速度和偏移角等。

在水滴随机喷溅数学模型基础上,学者进行了模型的适用性验证,以及改进工作。如在双江口水电站数学模型喷溅试验^[17]的数值计算中,水面以上

的下垫面为自然地形,验证了水滴随机喷溅数学模型在复杂地形情况下的适应能力。两河口水电站的泄洪雾化计算中^[18],引入水舌风的作用,在数学模型中增加考虑了水舌风对喷溅水滴运动的影响。

水滴随机喷溅数学模型,通常采用蒙特卡洛方法^[19]进行求解,即生成大量符合假设随机变量分布的随机水滴,最后统计水滴停止运动后的分布情况,由此获得雾化降雨大小。由于雾化降雨大小由随机水滴统计产生,因此受到水滴样本数量的影响较大。为得到较准确的雾化降雨数值,水滴随机喷溅数学模型常需要生成几百万的水滴作为样本,计算量大、效率低。

云物理学理论^[20]为计算云滴谱随时间和高度的演变情况^[21],采用的方法是将云滴按照大小划分为若干档^[22],然后随着时间步的增加,云滴自然凝结生长,云滴大小越出原档,各档云滴数量也随之增减,从而计算出云滴谱的演变情况。在燃油喷雾数值模拟^[23]中,离散液滴数学模型^[24]并不会计算所有油滴的运动,而是选取计算若干具有代表性的样本油滴的运动轨迹^[25],提高了计算效率。在模拟流化床^[26]的颗粒流动算法中,如 OpenFOAM 的 DPMFoam 求解器^[27],采用了颗粒微团,即多个颗粒的集合,并假定集合中的颗粒具有相同的尺寸和速度。上述方法的目的都在于减少计算雾滴、油滴和颗粒的数量,以降低对内存和计算能力的需求。

因此,本文基于云滴分档、代表性油滴和颗粒微团等降低计算量的思想,提出分档水滴的概念,建立挑流泄洪雾化的水滴分档随机喷溅数学模型,并在假定条件下对模型进行对比验证。

1 水滴运动微分方程及其解析解

1.1 水滴运动微分方程

如图 1 所示,假设在直角坐标系 $Oxyz$ 的 O 点处,抛出 N 个水滴,初始速度为 v ,速度与 Oxy 面的夹角为出射角 β ,速度与 Oxz 面的夹角为偏移角 φ 。从原点处抛出的水滴做斜抛运动,当水滴接触 Oxy 面时,则停止下来。在某个时间间隔内,通过统计水

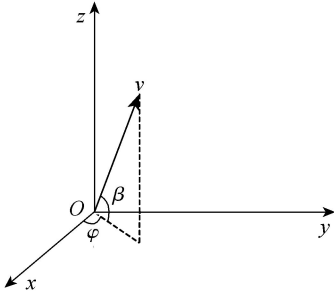


图 1 水滴喷溅示意图

滴在水平面上的质量分布情况,即可求得雾化降雨的数值。

考虑水滴在运动过程中受到浮力、重力和空气阻力的作用,则水滴的运动微分方程^[13]为

$$\begin{cases} \ddot{x} = -C_f \frac{3}{4d} \frac{\rho_a}{\rho} |v_w - v_a| (\dot{x} - v_{ax}) \\ \ddot{y} = -C_f \frac{3}{4d} \frac{\rho_a}{\rho} |v_w - v_a| (\dot{y} - v_{ay}) \\ \ddot{z} = -C_f \frac{3}{4d} \frac{\rho_a}{\rho} |v_w - v_a| (\dot{z} - v_{az}) - \frac{\rho - \rho_a}{\rho} g \end{cases} \quad (1)$$

式中: C_f 为空气阻力系数; d 为水滴直径; ρ 为水滴密度; ρ_a 为空气密度; v_w 为水滴速度; v_a 为环境风速(v_{ax} 、 v_{ay} 、 v_{az} 分别是 3 个坐标轴上的投影); g 为重力加速度。

水滴运动微分方程的初始条件为

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v \cos \beta \cos \varphi \\ \dot{y}(0) = v \cos \beta \sin \varphi \\ \dot{z}(0) = v \sin \beta \end{cases} \quad (2)$$

式中: v 为水滴的初始速度; β 、 φ 分别为水滴的出射角和偏移角。

1.2 水滴运动微分方程的解析解

式(1)是一个二阶非线性微分方程组,不能得到其解析解。对其做解耦合线性化的处理,转变为二阶线性微分方程组,得到:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -D(\dot{x} - v_{ax}) \\ \ddot{y} = -D(\dot{y} - v_{ay}) \\ \ddot{z} = -D(\dot{z} - v_{az}) - \frac{\rho - \rho_a}{\rho} g \end{cases} \quad (3)$$

其中 $D = C_f \frac{3}{4d} \frac{\rho_a}{\rho} < |v_w - v_a| >$

式中: $< |v_w - v_a| >$ 为水滴速度与环境风速差值的系综平均。

由初始条件(2),并假设环境风速 v_a 为常数,可以得到式(3)的解析解:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{e^{-Dt}}{D} [(e^{Dt} - 1) v \cos \beta \cos \varphi + (1 - e^{Dt} + D e^{Dt} t) v_{ax}] \\ y(t) = \frac{e^{-Dt}}{D} [(e^{Dt} - 1) v \cos \beta \sin \varphi + e^{-Dt} (1 - e^{Dt} + D e^{Dt} t) v_{ay}] \\ z(t) = \frac{e^{-Dt}}{D^2} [(e^{Dt} - D e^{Dt} t - 1) \frac{\rho - \rho_a}{\rho} g + (D e^{Dt} - D) v \sin \beta + (D - D e^{Dt} + D^2 e^{Dt} t) v_{az}] \end{cases} \quad (4)$$

令 $z(t_a) = 0$, 可以获得水滴接触 Oxy 平面的时间 t_a 的计算公式如式(5)所示, 然后可以得到水滴停留在 Oxy 平面上的位置为 $(x(t_a), y(t_a))$ 。

$$t_a = \frac{-\frac{\rho - \rho_a}{\rho}g - Dv\sin\beta + Dv_{az}}{D(-\frac{\rho - \rho_a}{\rho}g + Dv_{az})} + \frac{D - \frac{\rho - \rho_a}{\rho}g}{D(-\frac{\rho - \rho_a}{\rho}g + Dv_{az})} \cdot \text{ProductLog}\left[-\frac{e^{\frac{\rho - \rho_a}{\rho}g + Dv\sin\beta - Dv_{az}}}{Dv_{az} \frac{\rho - \rho_a}{\rho}g} \cdot \left(\frac{\rho - \rho_a}{\rho}g + Dv\sin\beta - Dv_{az}\right)\right] \quad (5)$$

若假定 v, β 和 φ 为随机变量, 并服从联合概率密度分布 $f(v, \beta, \varphi)$, 则由连续型随机变量的函数的分布理论^[28], 式(4)的多元函数所对应的概率密度分布为

$$f_p(x(t), y(t), z(t)) = f(v(x(t), y(t), z(t)), \beta(x(t), y(t), z(t)), \varphi(x(t), y(t), z(t))) | J| \quad (6)$$

其中 $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$

2 水滴分档随机喷溅数学模型

在水滴随机喷溅数学模型^[13]中, 水滴的初始速度 v 、出射角 β 和偏移角 φ , 均为随机变量, 模型通常采用蒙特卡洛方法进行求解。

为了改进蒙特卡洛方法计算量大、效率低的缺点, 基于云滴分档^[22]、代表性油滴^[25]和颗粒微团^[27]等学术思想, 提出水滴分档随机喷溅数学模型。主要改进内容为, 根据水滴初始参数相空间进行分档化处理, 由此形成分档水滴, 并让一个分档水滴携带概率信息, 以代表多个水滴, 最终减少实际的计算量, 提高计算效率。

2.1 水滴初始物理参数的相空间

将水滴的初始参数 v, β 和 φ 所构成的物理空间, 称为水滴运动初始物理参数的相空间, 记为 $\Gamma(v, \beta, \varphi)$, 如图2所示。相空间中的一个相点表示单个水滴的初始状态, 整体表示水滴所有可能的初始状态。

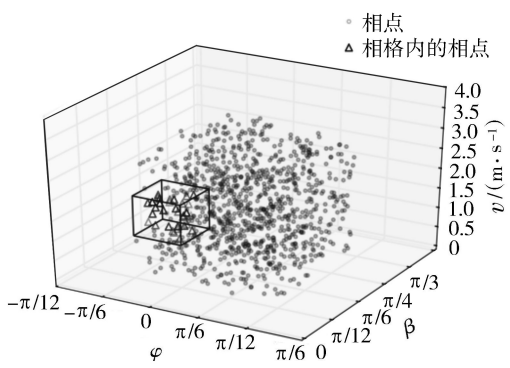


图2 水滴初始物理参数的相空间示意图

2.2 相空间分档方法

水滴初始物理参数相空间的分档方法如下:

a. 水滴初始速度的分档。对 v 做均匀分布的分档化处理^[22], 这里划分为 I 档, 每档的大小为 a , 则每个档的速度 v_i 为

$$v_i = ai \quad (i = 1, 2, \dots, I) \quad (7)$$

b. 水滴出射角的分档。对 β 也同样做均匀分布的分档化处理: 分为 J 档, 每档的大小为 b , 则出射角 β_j 为

$$\beta_j = bj \quad (j = 1, 2, \dots, J) \quad (8)$$

c. 水滴偏移角的分档。对 φ 也做均匀分布的分档化处理: 在其定义域内均匀分为 K 档, 每档的大小为 c , 则偏移角 φ_k 为

$$\varphi_k = ck \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (9)$$

2.3 分档水滴及其概率值计算

水滴运动初始物理参数相空间通过分档之后, 形成相格(图2中长方形线框)。一个相格中包含了多个相点, 即内含多个水滴的初始状态信息。用一个代表性相点, 来表征整个相格中所有相点, 称这个代表性相点对应的水滴为分档水滴。分档水滴所对应的概率密度为

$$P_{ijk} = f(v_i, \beta_j, \varphi_k) \quad (10)$$

3 微分方程和数学模型的求解

为了获得水滴运动微分方程组的解析解, 并以此为准, 评价水滴随机喷溅数学模型和水滴分档随机喷溅数学模型的数值解的精确度, 从而验证水滴分档随机喷溅数学模型的求解精度。

在不改变微分方程组本质的情况下, 为对公式(1)进行简化, 提出如下两个假定条件: ①忽略空气阻力和浮力作用; ②随机变量 v 和 β 取为定值, φ 的概率密度函数 f_φ 满足正态分布:

$$f_\varphi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\varphi^2}{2\sigma^2}} \quad \left(\sigma = \frac{\pi}{9}\right) \quad (11)$$

3.1 水滴运动线性微分方程的解析解

在假定条件下, 得到下列参数的数值: 阻力系数

$C_f=0$,空气密度 $\rho_a=0\text{ kg/m}^3$ 。代入式(3),得到水滴位置随时间的函数关系为

$$\begin{cases} x(t)=tv\cos\beta\cos\varphi \\ y(t)=tv\cos\beta\sin\varphi \\ z(t)=tv\sin\beta-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{12}$$

令 $z(t_a)=0$,则水滴经过一段时间 t_a ,因接触 Oxy 面而停止运动,可以得到水滴停止运动时的位置与 φ 的函数关系为

$$\begin{cases} x(\varphi)=\frac{v^2\sin2\beta\cos\varphi}{g} \\ y(\varphi)=\frac{v^2\sin2\beta\sin\varphi}{g} \\ z(\varphi)=0 \end{cases} \tag{13}$$

由于 f_φ 为正态分布,绝大部分水滴位于 $(-3\sigma,3\sigma)$ 范围内,因此可取 φ 的定义域为 $C=(-\pi/3,\pi/3)$ 。

式(13)中函数 $x(\varphi)$ 在定义域 C 内不是单调函数,导致由式(6)得到沿 x 轴概率密度的解析解需要进行分段处理。因此选择函数 $y(\varphi)$ 进行验证。在定义域范围内,导数 $y'(\varphi)>0$ 为单调函数,解析解不需要分段,便于对比验证。由定义域可以求得其值域 $S=(-v^2\sin2\beta\sin(\frac{\pi}{3})/g,v^2\sin2\beta\sin(\frac{\pi}{3})/g)$ 。

$y(\varphi)$ 的反函数为

$$\varphi(y)=\arcsin\left(\frac{gy}{v^2\sin2\beta}\right) \tag{14}$$

由假设条件②,已知 φ 的概率密度函数,以及式(6),可得到水滴在 y 轴上投影的概率密度函数为

$$f_{y\varphi}(y)=f_\varphi(\varphi(y))\left|\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\arcsin^2\left(\frac{g|y|}{v^2\sin2\beta}\right)}{2\sigma^2}}\cdot\left|\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{g|y|}{v^2\sin2\beta}\right)^2}}\frac{g}{v^2\sin2\beta}\right| \quad (y\in S) \tag{15}$$

为便于解析解与数学模型的数值解进行对比,对解析解进行离散化处理。将值域 S 均匀分为 M 个数量的组,组距为 h ,即第 m 组的取值范围是 $[h_{m-1},h_m)$,分组形式记为集合 $A=\{[h_{m-1},h_m)\mid m=1,2,\cdots,M\}$ 。则水滴处于第 m 组内的概率密度的解析解为

$$p_{m,an}=f_{y\varphi}\left(\frac{h_{m-1}+h_m}{2}\right) \tag{16}$$

3.2 水滴随机喷溅数学模型的数值解

水滴随机喷溅数学模型采用蒙特卡洛方法求解,生成的水滴为随机产生,现生成 N 个水滴,其中的偏移角使用随机数发生器产生,记为 $\varphi_{n,r}(n=1,$

$2,\cdots,N)$,它满足概率密度函数 f_φ 。

根据式(13),可以计算水滴偏移角为 $\varphi_{n,r}$ 时,相应 在 y 轴上的运动距离为 $y_{n,r}$ 。依据分组集合 A ,统计 $y_{n,r}$ 在第 m 个分组范围内的水滴的个数,记为 $q_{m,r}$,计算公式为

$$q_{m,r}=\sum_{n=1}^N[u(y_{n,r}-h_{m-1})-u(y_{n,r}-h_m)] \tag{17}$$

其中
$$u(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}$$

得到水滴处于第 m 组的概率密度为

$$p_{m,rd}=\frac{q_{m,r}}{N(h_m-h_{m-1})} \tag{18}$$

3.3 水滴分档随机喷溅数学模型的数值解

水滴分档随机喷溅数学模型,生成的分档水滴,在定义域内均匀分布,并且包含概率信息,具体的计算步骤如下:

步骤1 由假定条件②,只需要对 φ 进行分档处理,因此在其定义域内,产生 N 个分档水滴,每个分档水滴的偏移角由式(9)计算,记为 $\varphi_{n,g}(n=1,2,\cdots,N)$ 。

步骤2 根据概率密度函数 f_φ ,以及式(10),计算得到偏移角为 $\varphi_{n,g}$ 的分档水滴所对应携带的概率 $p_{n,g}$ 为

$$p_{n,g}=f_\varphi(\varphi_{n,g})c \tag{19}$$

步骤3 由式(13)计算出分档水滴在偏移角为 $\varphi_{n,g}$ 时,在 y 轴上的运动距离 $y_{n,g}$ 。

步骤4 依据分组集合 A 对分档水滴在 y 轴的距离进行分组,得到处于第 m 组范围水滴的概率 $q_{m,g}$ 为

$$q_{m,g}=\sum_{n=1}^Np_{n,g}[u(y_{n,g}-h_{m-1})-u(y_{n,g}-h_m)] \tag{20}$$

步骤5 得到水滴处于第 m 组范围的概率密度为

$$p_{m,gd}=\frac{q_{m,g}}{(h_m-h_{m-1})\sum_{n=1}^Np_{n,g}} \tag{21}$$

4 案例计算与结果分析

式(1)是非线性微分方程组,一般情况下,只能采用数值模型进行求解。若不进行参数简化,仅能得到两个数学模型的数值解。没有解析解的准确值作为基准,无法判别两种数值模型的计算结果的误差大小。案例是在两个假设条件下,对微分方程组中的参数进行简化,获得解析解式(15),并以此作为后续两个数值解计算误差的对比基准。

在两个假定条件下,选取 $v=10\text{ m/s}$, $g=9.81\text{ m/s}^2$, $\beta=\pi/5$, $M=100$ 。根据上述 3 种求解方法,可以分别得到解析解和两个模型的数值解,并对计算结果进行对比和误差分析。

水滴随机喷溅数学模型生成的 100 个水滴的偏移角 φ 的分布如图 3(a)所示,在概率密度较小的区域,生成的水滴个数过于稀少,甚至为 0。图 3(b)为水滴分档随机喷溅数学模型产生的 100 个分档水滴的偏移角分布情况,在定义域内非常均匀。

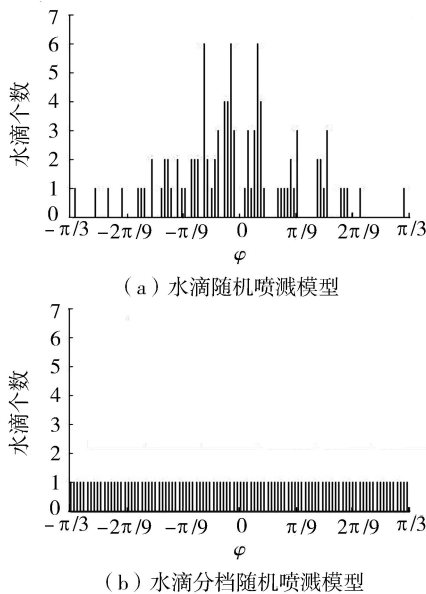


图 3 两个数学模型所产生水滴的偏移角分布

4.1 水滴随机喷溅数学模型的数值解

当水滴总数分别为 1 000、1 万、10 万和 100 万时,采用水滴随机喷溅数学模型的求解结果如图 4 所示。

当水滴总数为 1 000 时,水滴随机喷溅数学模型的数值解相比解析解有较大的误差,误差的波动幅度也很大(图 4(a))。水滴个数达到 1 万时,数值解虽然局部与解析解仍然有较大偏差,但误差明显减小,误差的波动幅度也缩小(图 4(b))。随着水滴个数继续增加,水滴随机喷溅数学模型的求解误差依然比较为明显,但继续减小(图 4(c)(d))。

4.2 水滴分档随机喷溅数学模型的数值解

分档水滴总数分别为 1 000、1 万、10 万和 100 万时,采用水滴分档随机喷溅数学模型的数值解结果如图 5 所示。

分档水滴总数为 1 000 时,结果如图 5(a)所示,水滴分档随机喷溅数学模型的数值解与解析解的差异较大,但相比图 4(a)要小许多,波动幅度相比也更小,呈现相对规律的锯齿状。当分档水滴个数增加 10 倍达到 1 万时的结果如图 5(b)所示,整体误差已经较小,已看不出数值解与解析解有明显差异。

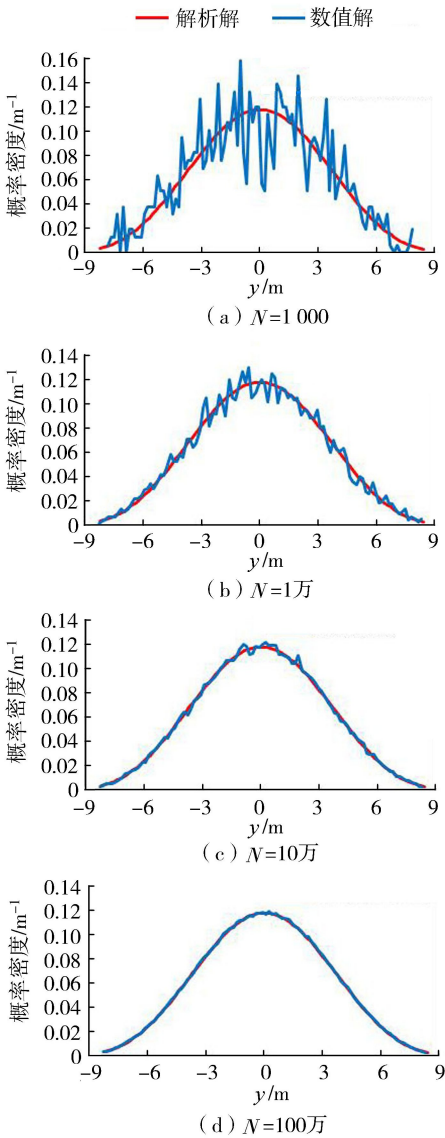


图 4 水滴随机喷溅模型的数值解与解析解

再继续增加分档水滴的个数(图 5(c)(d)),对计算精度的改善作用已经很小。

对比图 5(b)和图 4(d)可见,1 万个分档水滴的误差,已能达到水滴随机喷溅数学模型使用 100 万个水滴求解时的水平。

4.3 误差分析

为量化水滴随机喷溅数学模型和水滴分档随机喷溅数学模型数值解的求解精度,评估数值解与解析解之间的误差大小。这里采用最大误差 η 和平均误差 ε 两个指标进行评价,计算公式如下:

$$\eta = \max \left(\left| \frac{p_{m,a} - p_{m,s}}{p_{m,a}} \right| \right) \times 100\% \tag{22}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left| \frac{p_{m,a} - p_{m,s}}{p_{m,a}} \right| \times 100\% \tag{23}$$

式中: $p_{m,a}$ 为第 m 个分组的解析解; $p_{m,s}$ 为第 m 个分组的数值解。

误差分析结果如表 1 所示。随着水滴个数的增

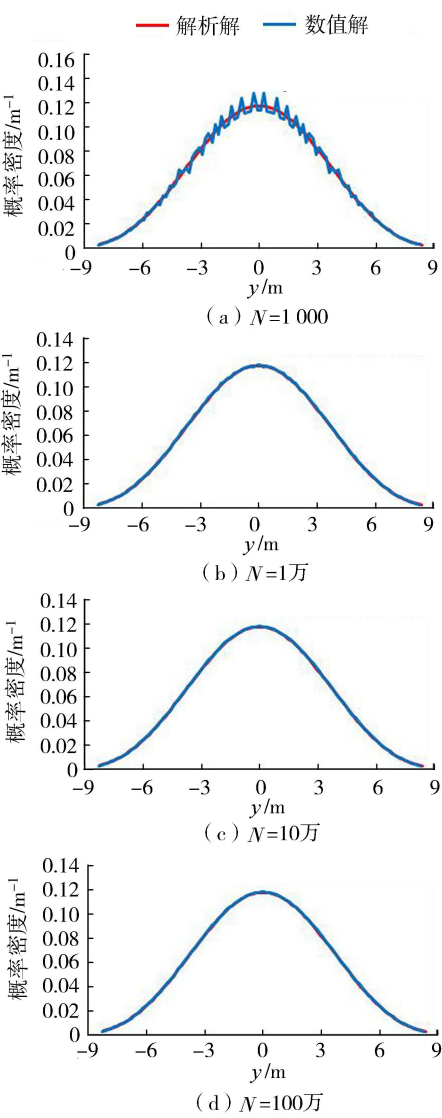


图5 水滴分档随机喷溅模型的数值解与解析解

加,水滴随机喷溅数学模型和水滴分档随机喷溅数学模型的误差均逐渐减小。在水滴总数为1万时,平均误差指标已比较小,分别为11.46%和3.86%;最大误差也迅速降低,水滴随机喷溅数学模型的误差从143.81%降至63.58%,水滴分档随机喷溅数学模型的误差从19.42%下降至12.94%。

表1 两个数学模型的数值解误差和计算所需时间对比

N/万	$\eta/\%$		$\varepsilon/\%$		计算所需时间/s	
	随机模型	分档随机模型	随机模型	分档随机模型	随机模型	分档随机模型
0.1	143.81	19.42	36.28	5.96	0.0028	0.0021
1	63.58	12.94	11.46	3.86	0.0055	0.0044
10	22.87	12.86	4.63	3.83	0.0330	0.0284
100	15.26	12.83	3.66	3.83	0.4054	0.3626

随水滴总数的变化,在两个模型的水滴个数相同,甚至较少的条件下,水滴分档随机喷溅数学模型的最大误差会更小。如在水滴总数为1万时,水滴分档随机喷溅数学模型的最大误差为12.94%,已经比水滴随机喷溅数学模型在水滴总数为100万时

的15.26%更小。

进一步对两个模型的平均误差,也显示出水滴分档随机喷溅数学模型的精度更高。当水滴分档随机喷溅数学模型在水滴总数为1万时,平均误差已经下降到3.86%,而水滴随机喷溅数学模型在总数达到100万时,平均误差才下降为3.66%,两者误差十分接近。

最后从收敛趋势来看,水滴随机喷溅数学模型,水滴总数从1000增加到100万时,最大误差从143.81%,降低为15.26%,一直在逐渐下降。而水滴分档随机喷溅数学模型在水滴总数从1000增加到1万后,继续增加水滴个数,误差变化不大。表明了水滴分档随机喷溅数学模型的误差收敛速度更快。

4.4 两个数学模型计算所需时间分析

在 i7-3770 处理器、24GB 内存的计算机配置,以及 Win7 系统、Python 3.5.2 编程环境的条件下,两个数学模型计算所需时间如表1所示。水滴总数从1000到100万,水滴随机喷溅模型的计算所需时间,从0.0028s增加到0.4054s;相对应的,水滴分档随机喷溅模型计算所需时间从0.0021s增加到0.3626s。同一个数学模型,水滴总数越大,计算所需时间越长,呈现线性关系。

在相同水滴总数情况下,两个数学模型计算所需时间的相对差异并不是很大,处于同一个数量级,但水滴分档随机喷溅模型所需时间更少。在水滴总数为1000时,计算所需时间分别为0.0028s和0.0021s;而在水滴总数为100万时,计算所需时间分别为0.4054s和0.3626s。

随着水滴总数的增加,两个数学模型计算所需时间相差会更大。在水滴总数为1000时,两个数学模型计算所需时间相差0.0007s;而在水滴总数为100万时,两个数学模型计算所需时间相差0.0428s。

参与计算的水滴总数越大,两个数学模型的数值解与解析解的误差越小。在水滴总数相同的条件下,水滴分档随机喷溅数学模型的误差明显更小,模型的计算所需时间也更少。水滴分档随机喷溅数学模型可以采用更小的水滴总数,减少所需计算时间,同时保证计算的准确度,从而提高了计算效率。

5 结 论

a. 针对水滴随机喷溅数学模型计算量大,效率较低的问题,提出了分档水滴的新概念,建立了挑流泄洪雾化的水滴分档随机喷溅数学模型。

b. 在两个假定条件下,对水滴分档随机喷溅数学模型进行了验证计算,结果显示该模型具有更好

的求解精度。其中 1 万个水滴的分档随机喷溅数学模型的求解结果,非常接近 100 万个水滴的随机喷溅数学模型的求解精度。

c. 在水滴总数相同的情况下,水滴分档随机喷溅数学模型计算所需时间更少,同时其数值解的误差也更小,表明水滴分档随机喷溅数学模型的计算效率更高。

参考文献:

[1] 刘宣烈,刘钧. 三元空中水舌掺气扩散的试验研究[J]. 水利学报,1989,34(11):10-17. (LIU Xuanlie,LIU Jun. Experimental study on the diffusion and aeration of three-dimensional jet [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1989,34(11):10-17. (in Chinese))

[2] 曾祥,肖兴斌. 高坝泄洪水流雾化问题研究介绍[J]. 人民珠江,1997,18(2):22-25. (ZENG Xiang XIAO Xingbin. Study and introduction of flood discharge atomization from high dam [J]. Pearl River,1997,18(2):22-25. (in Chinese))

[3] 刘宣烈,安刚,姚仲达. 泄洪雾化机理和影响范围的探讨[J]. 天津大学学报,1991,37(增刊1):30-36. (LIU Xuanlie,AN Gang,YAO Zhongda. The investigation on the mechanism and sphere of influence of atomization by discharge flow [J]. Journal of Tianjin University,1991,37(Sup1):30-36. (in Chinese))

[4] 李瓚. 龙羊峡水电站挑流雾化水雾诱发滑坡问题[J]. 大坝与安全,2001,15(3):17-20. (LI Zan. Landslide problems induced by the flood discharging atomization in Longyangxia Hydropower Station [J]. Dam & Safety, 2001,15(3):17-20. (in Chinese))

[5] 邢林生,周建波. 我国特高坝安全长效运行技术探讨[J]. 水利水电科技进展,2013,33(4):1-5. (XING Linsheng,ZHOU Jianbo. Discussion on long-term and safety operation of ultra-high dams in China [J]. Advances in Science and Technology of Water Resources,2013,33(4):1-5. (in Chinese))

[6] 杨清. 对隔河岩工程泄洪雾化的认识与防护[J]. 人民长江,1993,24(4):22-28. (YANY Qing. Understanding and protection of flood discharge atomization in Geheyan Project [J]. Yangtze River, 1993,24(4):22-28. (in Chinese))

[7] 杜兰,卢金龙,李利,等. 大型水利枢纽泄洪雾化原型观测研究[J]. 长江科学院院报,2017,34(8):59-63. (DU Lan,LU Jinlong,LI Li,et al. Prototype observation on flood discharge atomization of large hydraulic project [J]. Journal of Hydraulic Engineering,2017,34(8):59-63. (in Chinese))

[8] 孙双科,刘之平. 泄洪雾化降雨的纵向边界估算[J]. 水利学报,2003,48(12):53-58. (SUN Shuangke,LIU Zhiping. Longitudinal range of atomized flow forming by

discharge of spillway and outlet works in hydropower stations [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2003,48(12):53-58. (in Chinese))

[9] 刘昉,练继建,张晓军,等. 挑流水舌入水喷溅试验研究[J]. 水力发电学报,2010,29(4):113-117. (LIU Fang,LIAN Jijian,ZHANG Xiaojun,et al. Experimental study of atomization and splashing caused by a ski-jump jet into scour pool [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2010,29(4):113-117. (in Chinese))

[10] 薛万云,杨家修,杜帅群,等. 基于 CFD 的挑流泄洪雾化特性研究[J]. 水利水电科技进展,2020,40(4):16-20. (XUE Wanyun,YANG Jiaxiu,DU Shuaiqun,et al. Study on characteristics of flood discharge atomization of ski-jump jet based on CFD [J]. Advances in Science and Technology of Water Resources,2020,40(4):16-20. (in Chinese))

[11] 练继建,刘丹,刘昉. 复杂空中碰撞下泄流雾化的数值预测[J]. 水力发电学报,2019,38(5):46-56. (LIAN Jijian,LIU Dan,LIU Fang. Numerical prediction of flood discharge atomization induced by complicated aerial collisions [J]. Journal of Hydroelectric Engineering,2019,38(5):46-56. (in Chinese))

[12] 梁在潮. 雾化水流计算模式[J]. 水动力学研究与进展(A 辑),1992,(3):247-255. (LIANG Zaichao. A computation model for atomization flow [J]. Journal of Hydrodynamics,1992,7(3):247-255. (in Chinese))

[13] 张华,练继建,李会平. 挑流水舌的水滴随机喷溅数学模型[J]. 水利学报,2003,48(8):21-25. (ZHANG Hua,LIAN Jijian,LI Huiping. Mathematical model of droplet randomly formed by splash of nappe [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2003,48(8):21-25. (in Chinese))

[14] 刘之平,柳海涛,孙双科. 大型水电站泄洪雾化计算分析[J]. 水力发电学报,2014,33(2):111-115. (LIU Zhiping,LIU Haitao,SUN Shuangke. Computational analysis of flood discharging atomization of large hydropower engineering [J]. Journal of Hydroelectric Engineering,2014,33(2):111-115. (in Chinese))

[15] 刘志国,柳海涛,孙双科,等. 丰满水电站重建工程挑流消能方案泄洪雾化研究[J]. 水利水电技术,2018,49(1):108-113. (LIU Zhiguo,LIU Haitao,SUN Shuangke,et al. Study on flood discharge atomization of ski-jump energy dissipation scheme for reconstruction project of Fengman Hydropower Station [J]. Water Resources and Hydropower Engineering, 2018,49(1):108-113. (in Chinese))

[16] 齐春风,练继建,刘昉,等. 玛尔挡水电站泄洪雾化数学模型研究[J]. 水利水电技术,2017,48(12):106-110. (QI Chunfeng,LIAN Jijian,LIU Fang,et al. Study on mathematical model of flood discharge atomization for Maerdang Hydropower Station [J]. Water Resources and

- Hydropower Engineering, 2017, 48 (12): 106-110. (in Chinese))
- [17] 柳海涛,刘之平,孙双科. 水舌入水喷溅的随机数学模型[J]. 水利水电科技进展, 2009, 29 (6): 1-4. (LIU Haitao, LIU Zhiping, SUN Shuangke. Stochastic mathematical model of splashing from water jets [J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2009, 29 (6): 1-4. (in Chinese))
- [18] 柳海涛,孙双科,郑铁刚,等. 两河口水电站泄洪雾化影响分析[J]. 水力发电, 2016, 42 (11): 54-57. (LIU Haitao, SUN Shuangke, ZHENG Tiegang, et al. Analysis of flood discharge atomization in Lianghekou Hydropower Station [J]. Water Power, 2016, 42 (11): 54-57. (in Chinese))
- [19] 张华,练继建,刘嘉焜. 应用蒙特卡罗方法求解一类随机微分方程[J]. 天津大学学报, 2003, 36 (4): 430-433. (ZHANG Hua, LIAN Jijian, LIU Jiakun. Monte-Carlo method for calculating a class of stochastic differential equation [J]. Journal of Tianjin University, 2003, 36 (4): 430-433. (in Chinese))
- [20] PRUPPACHER H, KLETT J, WANG P. Microphysics of clouds and precipitation [M]. Netherlands: Springer, 1996.
- [21] JENSEN J B, BAKER M B. A simple model of droplet spectral evolution during turbulent mixing [J]. Journal of Atmospheric Sciences, 1989, 46 (18): 2812-2829.
- [22] 郭学良,黄美元,徐华英,等. 层状云降水微物理过程的雨滴分档数值模拟[J]. 大气科学, 1999, 23 (6): 745-752. (GUO Xueliang, HUANG Meiyuan, XU Huaying, et al. Rain category numerical simulations of microphysical processes of precipitation formation in stratiform clouds [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences, 1999, 23 (6): 745-752. (in Chinese))
- [23] GOSMAN A D, JOHNS J R. Computer analysis of fuel-air mixing in direct-injection engines [C]//Automotive engineering congress and exposition, technical paper 800091. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 1980:75-90.
- [24] AMSDEN A A, O'ROURKE P J, BUTLER T D. Kiva-ii: a computer program for chemically reactive flows with sprays [R]. Los Alamos: Los Alamos National Lab, 1989.
- [25] O'ROURKE P J. The kiva computer program for multidimensional chemically reactive fluid flows with fuel sprays [C]//Numerical Simulation of Combustion Phenomena. [S. l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1985: 74-89.
- [26] GOLDSCHMIDT M J V. Hydrodynamic modelling of fluidised bed spray granulation [D]. Enschede: Twente University Press, 2001.
- [27] FERNANDES C, SEMYONOV D, FERRÁS L L, et al. Validation of the cfd-dpm solver dpmfoam in openfoam through analytical, numerical and experimental comparisons [J]. Granular Matter, 2018, 20 (4): 64.
- [28] 顾玉娣. 求连续型随机变量函数的概率密度 [J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 2002, 31 (2): 96-98. (GU Yudi. Seeking the probability density of continuous random variable function [J]. Journal of Shanghai Teachers University (Natural Sciences), 2002, 31 (2): 96-98. (in Chinese))

(收稿日期: 2021 - 06 - 30 编辑: 郑孝宇)

《水利水电科技进展》征订启事

(邮发代号: 28-244, CN 32-1439/TV, ISSN 1006-7647, 双月刊, A4 开本)

《水利水电科技进展》由河海大学主办, 是中国科学引文数据库 (CSCD) 核心期刊、全国中文核心期刊、中国科技核心期刊和 RCCSE 核心期刊。曾先后被评为中国高校百佳科技期刊、中国高校优秀科技期刊、全国水利系统优秀期刊、华东地区优秀期刊和江苏省优秀期刊。主要刊登水科学、水工程、水资源、水环境、水管理方面的科技论文, 主要栏目有水问题论坛、研究探讨、工程技术、专题综述、水管理、国外动态等, 适合水科学、水工程、水资源、水环境领域的科研、工程、管理人员以及大专院校师生阅读。

《水利水电科技进展》由邮局发行, 邮发代号: 28-244, 2022 年每期定价 15 元, 全年 6 期共计 90 元。可在全国各地邮局订阅, 也可直接向编辑部订阅。

编辑部地址: 南京市西康路 1 号 河海大学《水利水电科技进展》编辑部

邮政编码: 210098 电话/传真: 025 - 83786335

网址: <http://jour.hhu.edu.cn>

E-mail: jz@hhu.edu.cn 或 jz1981@vip.163.com

微信公众号: “水利水电科技进展” 或 “slsdkjz”

