

基于最小作用原理的积水土坡水分入渗路径及规律研究

肖耀廷¹, 朱悦璐²

(1. 湖北文理学院土木工程与建筑学院, 湖北 襄阳 441053; 2. 南昌工程学院水利与生态工程学院, 江西 南昌 330099)

摘要: 基于最小作用原理, 以时间为最小作用量, 建立了二维 Richards 方程水分入渗路径的泛函, 提出了积水条件下土坡水分入渗的变分解, 并在此基础上利用 Brooks-Corey 模型计算了锋面以上土体的水力坡降并讨论了入渗曲线的形态, 同时利用 Hydrus 2D 软件分析了第一类边界条件下土坡内含水量分布。结果表明: 二维斜面入渗的变分解与一维水平入渗、垂直入渗变分解具有相同形式; 入渗曲线表现为外凸形态; 数值计算得到的入渗量与湿润锋深度呈线性关系, 与变分解的分析结果一致; 变分解求得的湿润锋深度、含水量分布用于分析边坡稳定等宏观工程问题是可行的。

关键词: 积水土坡; 入渗曲线; 最小作用原理; Richards 方程; 变分解

中图分类号: TV139.1

文献标志码: A

文章编号: 1006-7647(2024)03-0001-07

Research on water infiltration path and law of ponding soil slopes based on minimum action principle//XIAO Yaoting¹, ZHU Yuelu²(1. College of Civil Engineering and Architecture, Hubei University of Arts and Science, Xiangyang 441053, China; 2. College of Water Conservancy and Ecological Engineering, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China)

Abstract: Based on the principle of minimum action and taking time as the minimum action quantity, the functional of two-dimensional Richards equation was established. The variational solution of soil slope water infiltration under ponding was proposed. Brooks-Corey model was used to calculate the hydraulic slope of soil mass and the shape of the infiltration curve was discussed. Hydrus 2D software was used to analyze the water content distribution in the slope under the first type of boundary conditions. The results show that the variational solution of the 2-D infiltration has the same form as that of the 1-D horizontal infiltration and vertical infiltration. The infiltration path is convex shape. The infiltration capacity is linearly related to the depth of the wetting front, which is consistent with the results obtained by variational solution. Therefore, the depth of wet front and the distribution of water content obtained by the variational solution are feasible to analyze the macro-engineering problems such as slope stability.

Key words: ponding soil slope; infiltration curve; minimum action principle; Richards equation; variational solution

我国是一个滑坡灾害频发的国家, 统计表明, 目前绝大多数的滑坡都与降雨有关^[1-2], 降雨是滑坡产生的一个重要原因。在全球气候变暖的背景下, 近几年我国各地区的降水量和降雨强度均有较大的增长, 尤其是 2021 年 7 月郑州遭遇的千年一遇洪水, 最大小时降水量达到了 201.9 mm, 造成了极大的危害^[3], 开展降雨条件下边坡水分入渗问题的研究具有重要的意义。

降雨条件下的水平入渗和垂直入渗问题比较经典的两类半解析解为 Parlange 解和 Philip 解。Parlange 解通过对第 i 次迭代的结果进行微分和积

分的方式求解第 $i+1$ 次的结果, 比较前后两次迭代结果来判断收敛与否^[4]。Philip 解通过 Botzmann 变换, 将偏微分方程转化为常微分方程, 并在此基础上进行迭代求解^[5]。利用上述两类解可分别求解两类边界条件下的含水量分布、入渗量以及入渗率等。

Green-Ampt 模型通过假设入渗时含水量分布, 可以解决干土积水入渗问题^[6], 在 Green-Ampt 模型基础上, Mein 等^[7]提出了适合降雨入渗的模型, 而基于试验和经验, Smith^[8]、Horton^[9]、Kostiakov^[10]等都分别提出了各自的降雨入渗模型。

以上研究主要是基于水平入渗和垂直入渗问题

开展的工作。Parlange 解和 Philip 解主要用于描述一维水分运动,但土坡的降雨入渗为二维问题,因此并不能直接应用 Parlange 解和 Philip 解求解。目前关于边坡的雨水入渗问题多采用相对简化的模型进行处理,例如常金源等^[11-13]通过对 Green-Ampt 模型进行坐标变换得到边坡中入渗量、入渗率以及湿润锋深度等的解答,李宁等^[14]通过对 Mein-Larson 模型进行坐标变化求解了边坡中水分入渗过程。上述做法可以在一定程度上很好地解决边坡入渗以及稳定性问题,但大都基于特定的含水量分布,且均假设水分入渗路径为垂直向下的一维入渗,而边坡中水分运动是否为一维垂直向下入渗也有待商榷。此外,还有很多学者从数值分析等其他角度分析了边坡入渗问题^[14-18],提出了各类复杂边界条件下水分入渗问题的解决办法,但并未给出相应的解析解。

最小作用原理是数学和物理学中的一个重要变分原理,已用于解决了许多经典的物理和数学问题,较为著名的如最速降线问题、光的折射问题等^[19]。边坡中水分总是沿着坡降最大或者速度最快的方向进行运动,这样就使得在各种运动路径中,真实路径的耗时最短。李纪伟等^[20]针对一维水平入渗,采用变分法求解了 Richards 方程的显式解,朱悦璐等^[21]在此基础上考虑了重力作用,基于最小作用原理,求解了该方程垂直条件下的显式解,两种解的表达形式相同。基于此思路,本文针对二维 Richards 方程,选取水分运动的时间作为最小作用量,利用变分法将积水土坡水分入渗问题转化为求解泛函极值问题,进而对水分入渗的路径和规律做进一步探讨。这种方法既不像传统 Parlange 解和 Philip 求解难度大,也不像 Green-Ampt 模型和 Mein-Larson 模型无法反映入渗过程,可以较好地描述积水土坡中水分入渗过程。

1 二维水分入渗的变分解

二维水分入渗计算简图如图 1 所示,图中 x 、 z 轴分别以向右、向下为正,土体任意一点的坐标为 (x,z) ,并假设该点到坐标原点的位移为 l , l 与 x 轴正方向的夹角为 α 。

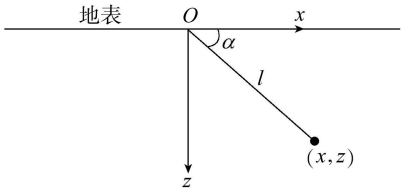


图 1 二维水分入渗计算简图

二维 Richards 方程及其第一类边界条件为^[22]

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \theta(l, 0) = \theta_i & (0 \leq l \leq l_f) \\ \theta(0, t) = \theta_0 & (0 < t < \infty) \end{cases} \quad (2)$$

式中: $D(\theta)$ 为扩散系数; $K(\theta)$ 为非饱和渗透系数; θ 、 θ_0 、 θ_i 分别为土壤含水量、边界含水量和初始含水量; t 为时间; l_f 为湿润锋由原点到点 (x,z) 的距离,即湿润锋深度。

由图 1 几何关系可知:

$$l^2 = x^2 + z^2 \quad (3)$$

对式(1)做 $\frac{dx}{dt}$ 、 $\frac{dz}{dt}$ 运算得:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta} \end{cases} \quad (4)$$

对式(3)做 $\frac{dl}{dt}$ 运算得:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dx}{dt} \cos \alpha + \frac{dz}{dt} \sin \alpha \quad (5)$$

将式(4)代入式(5)并整理得到:

$$\frac{dl}{dt} = 2\theta' \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial K_e(\theta)}{\partial \theta} \quad (6)$$

其中 $\theta' = \frac{\partial \theta}{\partial l} \quad K_e(\theta) = K(\theta) \sin \alpha$

以时间作为最小作用量,入渗路径可看作时间的泛函,可得:

$$T(\theta) = \int_0^{l_f} dt = \int_0^{l_f} \frac{dt}{dl} dl \quad (7)$$

将式(6)代入式(7)得:

$$T(\theta) = \int_0^{l_f} \left[2\theta' \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial K_e(\theta)}{\partial \theta} \right]^{-1} dl \quad (8)$$

记核函数为

$$F(\theta, \theta') = \left[2\theta' \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial K_e(\theta)}{\partial \theta} \right]^{-1} \quad (9)$$

泛函取极值时,核函数需满足欧拉-拉格朗日方程^[20]:

$$F - \theta' F'_\theta = C \quad (10)$$

式中 C 为常数。

将式(9)代入式(10),并令 $B = 2\theta' \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} =$

$$2 \frac{\partial D(\theta)}{\partial l}, A = \frac{\partial K_e(\theta)}{\partial \theta} \text{ 可得:}$$

$$2B + A = C(B^2 + 2AB + A^2) \quad (11)$$

式(11)可看作 B 的一元二次方程,求解并化简可得:

$$\partial D(\theta) = \frac{2 - 2AC \pm \sqrt{H}}{4C} \partial l \quad (12)$$

$$H = (2AC - 2)^2 - 4C(CA^2 - A)$$

对式(12)两边积分:

$$D(\theta) = \frac{2 - 2AC \pm \sqrt{H}}{4C}l + C_1 \quad (13)$$

式中 C_1 为积分常数。代入边界条件式(2)得:

$$D(\theta_i) = \frac{2 - 2AC \pm \sqrt{H}}{4C}l_i + C_1 \quad (14)$$

$$D(\theta_0) = C_1 \quad (15)$$

联立式(14)、式(15)可得:

$$\frac{2 - 2AC \pm \sqrt{H}}{4C} = \frac{D(\theta_i) - D(\theta_0)}{l_i} \quad (16)$$

将式(15)和式(16)代入式(13)得:

$$D(\theta) = \frac{D(\theta_i) - D(\theta_0)}{l_i}l + D(\theta_0) \quad (17)$$

式(17)即为积水条件下二维入渗 Richards 方程基于时间最小作用量的变分解。可以看出,该解与文献[20-21]所表达的一维水平入渗、一维垂直入渗方程具有相同形式,表明在积水条件下,不论何种入渗方式,以时间作为最小作用量时,水分入渗仅受扩散系数影响,不受渗透系数(重力项)影响。下面对这一曲线所可能展现的形态做具体的分析。

2 土坡水分入渗路径及其规律

2.1 水分入渗路径

土坡斜面水分入渗路径如图2所示,其中路径1为垂直坡面方向,路径2为垂直向下方向,路径3为任意方向。

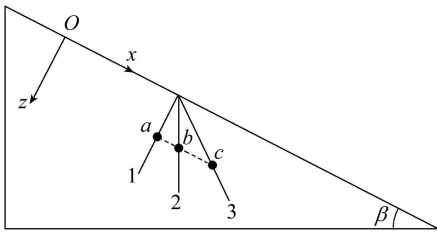


图2 土坡斜面水分入渗路径示意图

当土体饱和时,水分运动仅受位置水头影响,显然沿路径2垂直向下时位置水头减小最快,因此水分沿此路径入渗。当土体非饱和时,水分受位置水头、吸力水头共同影响,在位置水头影响下,水分沿路径2运动;在吸力水头影响下,水分有可能沿路径1、2、3运动,在各路径中选择平行斜坡的一平面上的a、b、c3点,由式(17)可知,当湿润锋与坡面平行时,在半无限斜面上,扩散系数仅与入渗相对位置有关,故处于同一相对位置的a、b、c3点扩散系数相同,由于路径1最短,因此水分在吸力水头作用下沿路径1入渗。

由以上讨论可知,当同时考虑位置水头和吸力

水头影响时,真实入渗路径介于路径1、2之间,由于水头与水力坡降直接相关,因此理论入渗路径(曲线形态)由垂直于坡面水力坡降 i_z 和平行于坡面水力坡降 i_x 共同决定。这样就将一个曲线形态问题转换为一个求解水力坡降 i_x 、 i_z 的数学问题。

2.2 水分入渗的水力坡降

由图2可知,平行于坡面水力坡降 $i_x = \sin\beta$ (β 为坡角),即斜面坡度一定时, i_x 为常数。对于垂直于坡面水力坡降 i_z ,由第2.1小节分析可知,当水分沿垂直坡面方向入渗时,总水头差包括位置水头差和吸力水头差,因此 i_z 可表示为

$$i_z = dh/dz + \cos\beta \quad (18)$$

式中: h 为吸力水头; dh/dz 为吸力水头引起的水力坡降。可以看出计算 dh/dz 是所有问题的核心所在。

以最为常见的水土特征曲线为例,设研究土体符合 Brooks-Corey (B-C) 模型^[23]:

$$S_e = \begin{cases} (h_b/h)^n & h > h_b \\ 1 & h \leq h_b \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$S_e = (\theta - \theta_r)/(\theta_s - \theta_r)$$

式中: S_e 为有效饱和度; θ_s 为饱和含水量; θ_r 为残余含水量; h_b 为进气压力水头; n 为形状参数。

在 B-C 模型中,渗透系数函数表达式为

$$K = \begin{cases} K_s (h_b/h)^m & h > h_b \\ K_s & h \leq h_b \end{cases} \quad (20)$$

其中

$$m = 2n + 2$$

式中: K_s 为饱和渗透系数; n 为试验参数。

根据扩散系数定义,联合式(19)、式(20)得:

$$D(\theta) = K \frac{dh}{d\theta} = GS_e^{(2n+1)/n} \quad (21)$$

其中

$$G = K_s h_b / [n(\theta_s - \theta_r)]$$

式中 G 为常数。

将式(17)中 l 替换为 z ,代入式(21)得:

$$\frac{(\theta - \theta_r)^{(2n+1)/n} - (\theta_0 - \theta_r)^{(2n+1)/n}}{(\theta_i - \theta_r)^{(2n+1)/n} - (\theta_0 - \theta_r)^{(2n+1)/n}} = \frac{z}{z_f} \quad (22)$$

式中 z_f 为湿润锋在垂直坡面方向的深度。

式(19)中第一个式子两边对 θ 求导得:

$$\frac{dh}{d\theta} = -\frac{h^{n+1}}{n(\theta_s - \theta_r)h_b^n} \quad (23)$$

式(22)两边对 z 求导得:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{(\theta_i - \theta)^{(2n+1)/n} - (\theta_0 - \theta)^{(2n+1)/n}}{z_f(\theta - \theta_r)^{(n+1)/n}(2n+1)/n} \quad (24)$$

联合式(23)、式(24)并化简,即可得到吸力水头引起的水力坡降:

$$\frac{dh}{dz} = \frac{dh}{d\theta} \frac{d\theta}{dz} = \frac{S_0^{(2n+1)/n} - S_i^{(2n+1)/n}}{z_f(2n+1)S_e^{(2n+2)/n}} h_b \quad (25)$$

式中: S_0 为表面有效饱和度; S_i 为初始有效饱和度。

综合以上讨论,平行和垂直于坡面的水力坡降表达式为

$$\begin{cases} i_x = \sin\beta \\ i_z = \frac{S_0^{(2n+1)/n} - S_i^{(2n+1)/n}}{z_f(2n+1)S_e^{(2n+2)/n}} h_b + \cos\beta \end{cases} \quad (26)$$

2.3 水分入渗规律

联合式(17)和(21)可得:

$$\frac{(\theta - \theta_r)^{(2n+1)/n} - (\theta_0 - \theta_r)^{(2n+1)/n}}{(\theta_i - \theta_r)^{(2n+1)/n} - (\theta_0 - \theta_r)^{(2n+1)/n}} = \frac{l}{l_f} \quad (27)$$

令 $(\theta_0 - \theta_r)^{(2n+1)/n} = E$, $(\theta_i - \theta_r)^{(2n+1)/n} - (\theta_0 - \theta_r)^{(2n+1)/n} = F$, 则式(27)可表示为

$$\theta = \left(\frac{l}{l_f} F + E \right)^{n/(2n+1)} + \theta_r \quad (28)$$

将式(28)中的含水量 θ 做均匀化处理,如图3所示,则得到平均含水量为

$$\bar{\theta} = \frac{1}{l_f} \int_0^{l_f} \theta dz \quad (29)$$

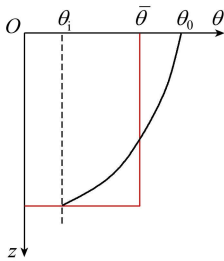


图3 含水量分布示意图

式(28)代入式(29)并化简得:

$$\bar{\theta} = \frac{2n+1}{3n+1} \frac{(\theta_i - \theta_r)^{(3n+1)/n} - (\theta_0 - \theta_r)^{(3n+1)/n}}{(\theta_i - \theta_r)^{(2n+1)/n} - (\theta_0 - \theta_r)^{(2n+1)/n}} + \theta_r \quad (30)$$

由式(30)可以看出,平均含水量与入渗时间或者入渗深度 l_f 无关,仅与初始含水量、表面含水量以及残余含水量有关。

假设积水条件下的入渗强度为 q , 由于平均含水量为常量,则入渗深度与入渗强度的关系可表示为

$$q = \bar{\theta} dl \quad (31)$$

两边分别积分,可得:

$$Q = \bar{\theta} l_f \quad (32)$$

式中 Q 为入渗量。

式(31)和(32)即为积水条件下二维入渗时入渗强度或入渗量与湿润锋深度的关系式。将初始含水量、边界含水量等参数代入式(30)可求得土坡内

的平均含水量,再利用式(32)可求得对应时刻的湿润锋深度 l_f ,最后将 l_f 代入式(27)即可求得湿润锋深度内土体含水量随深度的分布规律。

3 土坡水分入渗分析

3.1 入渗曲线形态

由式(26)可以看出, i_x 在入渗过程中为常数,而 i_z 在 $S_e^{(2n+2)/n}$ 的作用下沿垂直坡面方向变化。现以一土坡为例说明这种变化的规律,假定土坡的坡角 $\beta = 32.5^\circ$, 坡体土的残余含水量 $\theta_r = 0.03$, 饱和含水量 $\theta_s = 0.35$, 进气压力水头 $h_b = 10$ cm, 形状参数 $n = 1.0$, 湿润锋在垂直坡面方向的深度 $z_f = 40$ cm, 分别取 $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, 将上述参数代入式(26), 其中 $S_e^{(2n+2)/n}$ 由不同的 z 值通过式(22)得到 θ 值计算。计算结果显示,在5个 z 向单位步长内, i_z 值的计算结果分别为 0.846、0.853、0.862、0.886、1.001; 而在 x 向单位距离内, i_x 均为 0.537。这样,在 x 和 z 方向,每单位步长所对应的一组 (i_x, i_z) 如图4所示。可以发现,当 z 增大时, $S_e^{(2n+2)/n}$ 有加速减小趋势,因此 i_z 在整体上随着 z 的增大而加速增大。

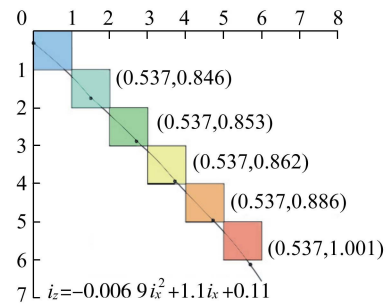


图4 水平和垂直水力坡降在单位步长内对应值

图4中各点所拟合的曲线,即为坡面真实水力坡降线,在实际入渗中,坡面内水分将沿该轨迹运动。其拟合方程为

$$i_z = -0.0069i_x^2 + 1.1i_x + 0.11 \quad (33)$$

该方程是一个二次项为负、开口向下的抛物线,这表明以最小作用原理通过变分法求解的 Richards 方程,其所代表的入渗路径为外凸形态。事实上,即便无具体数值,通过观察式(26)也可发现,当边坡坡角 $\beta < 45^\circ$ 时, z 向单位距离内水力坡降和水力坡降增大速率总大于 x 向,因此曲线总会具备如图4所示的外凸形态。

3.2 入渗曲线凹凸性成因及拐点讨论

土坡入渗曲线呈外凸形态的主要原因在于:一定条件下(时间或深度范围内), x 方向水力坡降保持不变, z 方向水力坡降持续增大,且增大幅度越来越大,导致二者之差越来越大,该状态可不严格地类比为平抛运动。

对于一般边坡,当土坡坡角 $\beta < 45^\circ$ 时,总有 $\sin\beta < \cos\beta$,具体到本文式(26),只要保证 i_z 表达式右边第一项为正,则总有 $i_z > i_x$ 。事实上通过计算可知, i_z 表达式右边第一项在计算区间内总大于 0。在加速增长趋势下,曲线呈一个开口向下的抛物线(凸型)。入渗曲线呈现外凸形态,是坡度较小时的一种状态,随着坡度变化,曲线的凹凸性会发生转换。

从数学意义上讲,只要当平行坡面水力坡降 i_x 大于垂直坡面水力坡降 i_z 时,曲线即会转为下凹形态。该问题等价于 $i_x - i_z > 0$,即:

$$\sin\beta - \cos\beta > \frac{S_0^{(2n+1)/n} - S_i^{(2n+1)/n}}{z_i(2n+1)S_e^{(2n+2)/n}}h_b \quad (34)$$

从物理意义上讲,由于本文研究的是时间为最小作用量下的入渗状态,即可认为这个入渗时间很短,属于入渗初期,因此,对于初始含水量较小的干土,在入渗初期,扩散效果为主导因素,曲线呈现外凸形态。当入渗一段时间后,含水量在物理上增大到重力起作用时,才会表现为入渗曲线形态由凸变凹。

综合上述数学和物理意义的分析可知,当坡度较大且入渗时间较长时,入渗曲线会逐渐由凸变凹。

为了进一步说明上述分析结果,借助 Geo-studio 中 Seep 模块分别对坡角为 30° 和 60° 的两个均质边坡进行降雨入渗分析。除坡角外,两个边坡其他参数相同。计算参数如下:坡脚处高度为 5 m,斜坡高度为 15 m,边坡总高度为 20 m;地下水水位为 5 m,与坡脚高度一致;土体饱和渗透系数为 1×10^{-5} m/s,饱和含水量为 0.5,水土特征曲线的参数为 $a = 45$ kPa、 $n = 2.5$ 、 $m = 2$;坡面单位雨量为 1×10^{-7} m³/(s · m²),入渗时间为 5 d,0.2 d 为一个时间步长,共 25 个时间步;为避免坡顶垂直入渗对坡面入渗的干扰,坡顶处未设置雨量边界。

图 5 和图 6 分别为两个土坡入渗时间为 1 d 和 5 d 时的流量矢量图。对于 30° 土坡,当入渗时间为 1 d 时(图 5(a)),在垂直坡面方向,随着深度的增加流量方向与坡面的夹角是逐渐增大的,呈外凸形态。当入渗时间为 5 d 时(图 5(b)),坡顶处因含水量较低,仍表现为外凸形态;但在坡脚附近,由于接近地下水水位,再加上较长的入渗时间,此处含水量较高,出现了类似于稳定渗流的内凹形态。

对于 60° 土坡,无论入渗时间为 1 d 还是 5 d,坡面附近处流量方向始终与坡面保持一个几乎不变的夹角,也即无明显外凸,随着距离坡面深度的增大,流量方向趋于垂直。分析式(26)不难看出,当坡角较大时,对于距离坡面较近的位置, i_z 表达式右边第

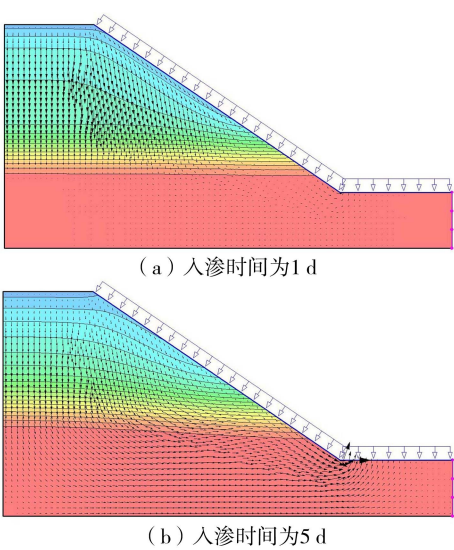


图 5 30° 土坡的流量矢量图

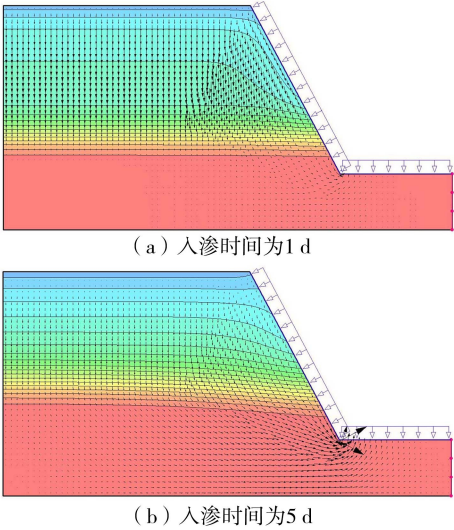


图 6 60° 土坡的流量矢量图

一项(吸力水头引起的坡降)和第二项(位置水头引起的坡降)的值都很小, i_z 相对于 i_x 要小得多,流量方向主要受 i_x 控制,从而使得坡面附近流量无明显外凸。但随着距离坡面深度的增大,吸力水头引起的坡降不断增大,使得流量方向逐渐向垂直方向偏移。同时,图 6(b)中流量方向已经逐渐趋于内凹,这是较大的坡角和较长的入渗时间共同作用所引起的,这也印证了本文关于入渗曲线凹凸性转换的判断和分析。

3.3 入渗规律分析

式(31)和式(32)给出了土坡积水条件下入渗强度或入渗量与湿润锋深度之间的关系,由第 2.3 节分析可知,入渗量与湿润锋深度呈线性关系,为分析式(31)和式(32)的合理性,利用 Hydrus 2D 软件建立一个 30° 土坡的分析模型,模型及其网格如图 7 所示。模型水平方向长度为 30 m,厚度为 15 m;土壤为砂壤土,水土特征曲线采用 B-C 模型模拟,主

要参数为:残余含水量 $\theta_0=0.041$, 饱和含水量 $\theta_s=0.453$, 试验参数 $\alpha=6.82\text{ m}^{-1}$ 、 $n=0.322$, 饱和渗透系数 $K_s=0.0259\text{ m/h}$ 。取初始含水量 $\theta_i=0.1$, 恒定表面含水量 $\theta_0=0.4$ 作为计算的初始条件和边界条件,入渗时间为 120 h。

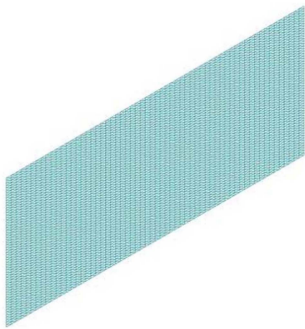


图 7 30°土坡的网格

分析结果显示,在保持表面含水量 $\theta_0=0.4$ 不变的情况下,入渗强度也维持在 0.0075 m/h 左右,因此可以认为雨强为一常数。图 8 为不同入渗时间含水量随深度的分布图,可见随着入渗时间的均匀增加湿润锋深度线性增加,说明入渗量与湿润锋深度呈线性关系,同时也论证了式(31)和(32)的合理性。

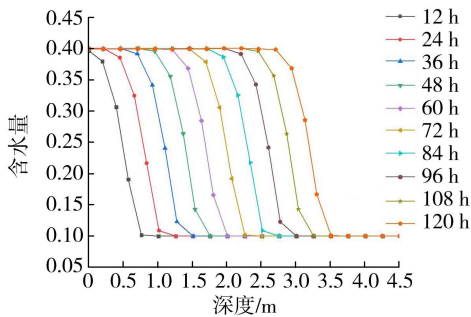


图 8 不同入渗时间含水量分布

同时由图 8 可以看出,每 12 h 湿润锋向前推进约 0.28 m ,对应的人渗量为 0.09 m ,由式(32)可以反算出土壤中的平均含水量为 0.32 。将 Hydrus 2D 软件计算参数 θ_0 、 θ_i 、 θ_r 、 n 代入式(30)可得基于变分法的平均含水量为 0.34 ,可见,基于变分法的理论解和数值计算的结果是基本吻合的。

为了分析变分解和数值解在相同湿润锋深度时含水量分布形态的差异,取数值解在 60 h 的含水量(湿润锋深度 2.01 m)分布曲线,与式(28)变分解中 $l_i=2\text{ m}$ 时的分布曲线进行对比,结果如图 9 所示。可以看出,两者均呈外凸形态,变分解的含水量分布曲线整体上更加光滑,变化较为均匀,仅在接近湿润锋处发生陡降;数值解则在土壤表层变化不大,表面含水量均为 0.4 ,在深度为 1.25 m 处开始发生陡降。

考虑到两者平均含水量较为接近,故本文变分解求得的湿润锋深度、含水量分布用于分析边坡稳定等宏观工程问题是可行的。

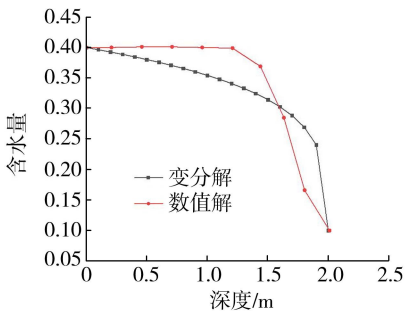


图 9 不同方法含水量分布形态

4 结 论

a. 基于最小作用原理的 Richards 方程变分解显示,第一类边界条件下非饱和一维水平入渗、垂直入渗和二维斜坡入渗在时间作为最小作用量时,其解具有相同形式。

b. 土坡内入渗曲线呈外凸形态,从数学意义上讲,主要是由于垂直坡面水力坡降的增幅越来越大;从物理意义上讲,主要是由于入渗初期重力项不起作用、扩散项起主导作用。入渗曲线凹凸性在一定条件下可以转换,其拐点必要条件为较大的坡度和较长的人渗时间。

c. 变分解和数值计算均表明入渗量与湿润锋深度呈线性关系,比例常数为平均含水量。变分解和数值计算得到的平均含水量分别为 0.34 和 0.32 ,计算结果较为接近,故本文变分解求得的湿润锋深度、含水量分布用于分析边坡稳定等宏观工程问题是可行的。

参考文献:

[1] 徐卫亚,周伟杰,闫龙. 降雨型堆积体滑坡渗流稳定性研究进展[J]. 水利水电科技进展,2020,40(4):87-94. (XU Weiya,ZHOU Weijie,YAN Long. Research progress on seepage stability of rainfall-induced accumulation landslide[J]. Advances in Science and Technology of Water Resources,2020,40(4):87-94. (in Chinese))

[2] 董志勇,庞鑫杰,周建芬. 降雨入渗条件下兰溪市某防洪古城墙稳定性分析[J]. 水利水电科技进展,2022,42(6):66-72. (DONG Zhiyong, PANG Xinjie, ZHOU Jianfen. Stability analysis of an ancient city wall for flood protection in Lanxi under rainfall infiltration[J]. Advances in Science and Technology of Water Resources,2022,42(6):66-72. (in Chinese))

[3] 陈文龙,杨芳,宋利祥,等. 高密度城市暴雨洪涝防御对策:郑州“7·20”特大暴雨启示[J]. 中国水利,2021

- (15): 18-21. (CHEN Wenlong, YANG Fang, SONG Lixiang, et al. Countermeasures for rainstorm and flood prevention in high-density cities: the “7 · 20” heavy rain revelation in Zhengzhou[J]. China Water Resources, 2021 (15): 18-21. (in Chinese))
- [4] PARLANGE J Y. Theory of water movement in soils; 8. one-dimensional infiltration with constant flux at the surface[J]. Soil Science, 1972, 114(1): 1-4.
- [5] PHILIP J R. The theory of infiltration[J]. Soil Science, 1957, 83(5): 345-357.
- [6] GREEN W H, AMPT G A. Studies on soil physics[J]. The Journal of Agricultural Science, 1911, 4(1): 1-24.
- [7] MEIN R G, LARSON C L. Modeling infiltration during a steady rain[J]. Water Resources Research, 1973, 9(2): 384-394.
- [8] SMITH R E. The infiltration envelope: results from a theoretical infiltrometer[J]. Journal of Hydrology, 1972, 17: 1-21.
- [9] HORTON R E. An approach toward a physical interpretation of infiltration-capacity [J]. Soil Science Society of America Journal, 1940, 5: 399-417.
- [10] KOSTIAKOV A N. On the dynamics of the coefficient of water-percolation in soils and on the necessity for studying it from a dynamic point of view for purposes of amelioration[J]. Trans 6th Comm Intern Soil Sci Soc Russian, 1932, 6: 17-21.
- [11] 常金源, 包涵, 伍法权, 等. 降雨条件下浅层滑坡稳定性探讨[J]. 岩土力学, 2015, 36(4): 995-1001. (CHANG Jinyuan, BAO Han, WU Faquan, et al. Discussion on stability of shallow landslide under rainfall[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(4): 995-1001. (in Chinese))
- [12] 程实, 陈瑾, 罗易. 考虑干燥裂隙动态变化的优势流入渗模型[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2024, 52(1): 37-45. (CHENG Shi, CHEN Jin, LUO Yi. A preferential flow model considering the dynamic changes of desiccation cracks [J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2024, 52(1): 37-45. (in Chinese))
- [13] 唐扬, 殷坤龙, 夏辉. 前期含水率对浅层滑坡降雨入渗及稳定性影响研究[J]. 岩土力学, 2017, 36(5): 204-208. (TANG Yang, YIN Kunlong, XIA Hui. Effects of initial water content on the rainfall infiltration and stability of shallow landslide[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 36(5): 204-208. (in Chinese))
- [14] 李宁, 许建聪, 钦亚洲. 降雨诱发浅层滑坡稳定性的计算模型研究[J]. 岩土力学, 2012, 33(5): 1485-1490. (LI Ning, XU Jiancong, QIN Yazhou. Research on calculation model for stability evaluation of rainfall-induced shallow landslides[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, 33(5): 1485-1490. (in Chinese))
- [15] 闫金凯, 黄俊宝, 李海龙, 等. 台风暴雨型浅层滑坡失稳机理研究[J]. 地质力学学报, 2020, 26(4): 481-491. (YAN Jinkai, HUANG Junbao, LI Hailong, et al. Study on instability mechanism of shallow landslide caused by typhoon and heavy rain [J]. Journal of Geomechanics, 2020, 26(4): 481-491. (in Chinese))
- [16] 曹硕鹏, 付宏渊, 高乾丰, 等. 降雨作用下裂隙红黏土边坡渗流特征与冲刷模式[J]. 中国公路学报, 2022, 35(5): 33-43. (CAO Shuopeng, FU Hongyuan, GAO Qianfeng, et al. Seepage characteristics and scouring modes of a cracked red clay slope under rainfall [J]. China Journal of Highway and Transport, 2022, 35(5): 33-43. (in Chinese))
- [17] 王成汤, 王浩, 张玉丰, 等. 锚索抗滑桩加固堆积型滑坡的受力特性模型试验与数值模拟研究[J]. 岩土力学, 2020, 41(10): 3343-3354. (WANG Chengtang, WANG Hao, ZHANG Yufeng, et al. Model test and numerical simulation study on the mechanical characteristics of the anchored slide-resistant pile for stabilizing the colluvial landslide[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, 41(10): 3343-3354. (in Chinese))
- [18] 洪勇, 邵珠山, 石广斌, 等. 基于三维极限分析法的 GIM 和 SRM 边坡安全系数计算结果对比[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2022, 50(4): 112-120. (HONG Yong, SHAO Zhushan, SHI Guangbin, et al. Comparison of GIM and SRM calculated slope safety factor based on three-dimensional limit analysis method [J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2022, 50(4): 112-120. (in Chinese))
- [19] 贾小文, 贺秀良, 范海英. 利用 Igor-Pro 对最速降线问题进行数值求解[J]. 大学物理, 2020, 39(12): 13-19. (JIA Xiaowen, HE Xiuliang, FAN Haiying. Using Igor-Pro to solve the brachistochrone problem [J]. College Physics, 2020, 39(12): 13-19. (in Chinese))
- [20] 李纪伟, 林法力, 韦昌富, 等. 非饱和土中水平入渗方程显示求解[J]. 岩土力学, 2021, 42(1): 203-210. (LI Jiwei, LIN Fali, WEI Changfu, et al. Explicit solution of horizontal infiltration equation in unsaturated soils [J]. Rock and Soil Mechanics, 2021, 42(1): 203-210. (in Chinese))
- [21] 朱悦璐, 陈磊. 基于最小作用原理的 Richards 方程变分解[J]. 岩土力学, 2022, 43(1): 119-126. (ZHU Yuelu, CHEN Lei. Variational decomposition of Richards equation based on the minimum action principle [J]. Rock and Soil Mechanics, 2022, 43(1): 119-126. (in Chinese))
- [22] 谢定义. 非饱和土土力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.
- [23] 雷志栋, 杨诗秀, 谢森传. 土壤水动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988.

(收稿日期: 2023-06-09 编辑: 熊水斌)