

3

13-17

二维平行壁面剪切流失稳内部流动结构初探

刘兆存 金忠青

(河海大学 南京 210098)

TV 13/1.21

摘要 本文在前人研究成果的基础上,阐述了二维平行壁面剪切流的失稳的演化过程。应用孤立子解对失稳过程中流动内部结构进行分析,重点从流体运动的自身规律寻求失稳的机制,对相干结构等湍流内部的运动现象提出了一些看法。

关键词 湍流 剪切流 失稳 孤立波 混沌

流动结构

湍流运动的规律非常复杂,对于三维完全发展的湍流,其内部结构的定性描述和定量分析都是相当困难的,目前的研究主要依靠实验来进行。分形和混沌理论的发展,给研究湍流开辟了新的途径。在一个非线性动力系统中,规则的有序结构和不规则的混沌状态可以并存。表观的无序是混沌的体现,是非线性作用的结果,不同尺度湍流的流动图像,受控于同一个方程。一个层次的混沌可以产生深一层次的有序,混沌态可以是稳定态(指随时间演化)。从偏微分方程角度出发模拟湍流,是湍流研究的一个前沿性课题。最有希望有可能用来说明湍流机理的是近年来发展的图像动力学,但目前还处于尝试阶段。

在湍流的拟序结构未被揭示前,有人就认为层流到湍流的转换是由于自激振动而造成的,湍流是一个具有无穷多自由度的振动体系(现在知道,湍流是无穷维的动力系统)。实验证明:环境湍流度很低的情形下,平板边界层转换的初期首先表现为T-S波的周期扰动。Gaster发现,大振幅的T-S波对亚谐和多重亚谐频率的弱激励是不稳定的,当扰动振幅充分大时有规则的周期波列会演化为不规则运动或混沌运动。这一过程会产生宽频带谱,这些宽频谱分量的增长几乎是爆炸

性的,会产生具有混沌时间序列的速度脉动,并可能最终导致湍流。对于大振幅脉动转换后期的非线性过程和最终的湍流状态理论处理还不太成熟,本文仅提出作者的一点看法。

如果一个系统是封闭的,它通向混沌的途径可通过倍周期迭加和间隙运动,从有序到混沌发生相变。对于开放系统走向混沌的道路人们还未完全探明。实验表明湍流内部的精细结构是三维的,涡运动的撕裂、合并、卷吸等现象具有强烈的随机性和三维性。众多随机的涡运动又表现出一定的拟序结构,且湍流内部结构又在统计意义上有自相似性。这种自相似性,在连续介质的基础上,可以将低层次上的信息量进行压缩,在大一级的尺度上描述湍流,得出其特征,再用子波变换逆向显示小尺度上的信息特征。湍流演化的方向总是沿着熵增的方向,无序性增加。拟序结构说明在熵增的同时必具有负熵源,维持湍流运动在用场观点描述时拟序结构图像在相同条件下统计意义上的确定性。这负熵源来自于自组织,实质是非线性作用。层流失稳到湍流是跨越很宽尺度的,任何二维的描述,如果是真实的,都可看成是三维运动的一个截面。

1 控制方程的近似处理

二维不可压缩平行壁面剪切流动的无量纲化的控制方程(以平板边界层或两平行平板间运动为模型)为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

式中 Re 为雷诺数。

据文献[1],取 $\epsilon = \frac{1}{Re^2}$ 为小参数,将平均流场和扰动流场区分开来,取

$$\begin{cases} u = \bar{u}(y) + \epsilon \bar{u}' \\ v = \epsilon \bar{v} \\ P = \bar{P}_0(x, y) + \epsilon \bar{P} \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)代入式(1)~(3)可知

$$\epsilon \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + [u(y) + \epsilon \bar{u}' + \epsilon \bar{u}'] \epsilon \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} \\ + \epsilon \bar{v} [u'(y) + \epsilon \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y}] \\ = -\frac{\partial \bar{P}_0}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \epsilon^{1/2} \left(\epsilon \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial y^2} + u'' \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + (u + \epsilon \bar{u}') \epsilon \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \epsilon^2 \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \\ = -\frac{\partial \bar{P}_0}{\partial y} - \epsilon \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \epsilon^{1/2} \left(\epsilon \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

取坐标的伸展变形 (G-M 变换)^[2],

$$\begin{cases} \xi = \epsilon^{1/2}(x - \lambda t) \\ \tau = \epsilon^{3/2}t \\ y = y \end{cases} \quad (8)$$

式中 λ 为剪切流中的波速(无量纲形式),对

于扰动量 $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{P}$ 采用小参数展开:

$$\begin{cases} \bar{u} = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \\ \bar{v} = \epsilon^{1/2} v_0 + \epsilon^{3/2} v_1 + \epsilon^{5/2} v_2 + \dots \\ \bar{P} = \epsilon P_0 + \epsilon^2 P_1 + \epsilon^3 P_2 + \dots \end{cases} \quad (9)$$

将式(8)和式(9)代入式(5)~(7)可知各阶近似:

零级近似 $\epsilon^{1/2}$:

$$u'' - \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_0}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

一级近似 $\epsilon^{3/2}$:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

$$(u - \lambda) \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + v_0 u'(y) = 0 \quad (13)$$

$$(u - \lambda) \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial P_0}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

二级近似 $\epsilon^{5/2}$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} + (u - \lambda) \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ + \frac{\partial P_0}{\partial x} + v_1 u' - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial x} + (u - \lambda) \frac{\partial v_1}{\partial x} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ + \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

上面采用的约化摄动方法,按文献[2](其所列文献有详细论述,近年虽有发展但基本思想变化不大)的观点,其实质是对于一般的描述非线性波的复杂方程组,通过适当的坐标变形和摄动展开,在逐阶近似下将方程组化简,从而可以分析远离波的相互作用区的远场。笔者认为,用此方法所得结果可定性讨论流场的内部结构。

2 方程的求解

由(10)和(11)两式可知,零级近似解就

是壁面剪切流动的平均流场解即层流解。

对于一级近似, 设解的形式为

$$\begin{cases} u_0 = f(y)n_0(\xi, \tau) \\ v_0 = g(y)N_0(\xi, \tau) \\ P_0 = h(y)H_0(\xi, \tau) \end{cases} \quad (18)$$

将式(18)代入式(12)~(14)和

$$f(y)n_{0\xi} + g'(y)N_0 = 0 \quad (19)$$

$$(u - \lambda)f(y)n_{0\xi} + gu'N_0 - f''n_0 = 0 \quad (20)$$

$$(u - \lambda)gN_{0\xi} - g''N_0 + h'H_0 = 0 \quad (21)$$

由式(19)知

$$\frac{n_{0\xi}}{N_0} = -\frac{g'}{f} = C_1(\text{常数}) \quad (22)$$

$$\text{故} \quad f(y) = -\frac{1}{C_1}g'(y) \quad (23)$$

$$N_0 = -\frac{f}{g'}n_{0\xi} = \frac{1}{C_1}n_{0\xi} \quad (24)$$

将式(23)和(24)代入式(20)知

$$g'(\lambda - u)n_{0\xi} + gu'n_{0\xi} + g''n_0 = 0$$

所以

$$\frac{n_{0\xi}}{n_0} = \frac{g''}{(u - \lambda)g' - gu'} = C_2(\text{常数}) \quad (25)$$

$$\frac{n_{0\xi}}{n_0} = C_2 \quad (26)$$

$$n_0 = e^{C_2\xi - f_1(\tau)} \quad (27)$$

$$g'' = C_2[(u - \lambda)g' - gu'] \quad (28)$$

$g(y)$ 可由式(28)加上适当定解条件确定。

仿照上面过程(推导见文[1]), 同理知

$$u_0 = -\frac{1}{C_1}g'n_0 \quad (29)$$

$$v_0 = \frac{g}{C_1}n_{0\xi} \quad (30)$$

$$P_0 = \frac{1}{C_1}[g'' - C_2](u - \lambda)gdy + C_4]n_{0\xi} \quad (31)$$

式(29)~(31)中, C_1, C_2, C_4 为常数。

将式(29)~(31)代入式(16)可知

$$\begin{aligned} & \alpha_1 n_{0\tau} + \alpha_2 n_{0\xi\xi} - \alpha_3 n_{0\xi\xi} + \alpha_4 n_{0\xi\xi\xi} \\ & = \frac{\partial u_1}{\partial y^2} - (u - \lambda) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - v_1 u' \end{aligned} \quad (32)$$

$$\text{其中} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{g'}{C_1} \\ \alpha_2 = \frac{1}{C_1^2}(g'^2 - gg'') \\ \alpha_3 = -\frac{1}{C_1}(g'' + g' + C_4) \\ \alpha_4 = -\frac{1}{C_1} \int (u - \lambda)gdy \end{cases} \quad (33)$$

将式(29)~(31)代入式(17)可知

$$\frac{g}{C_1}(n_{1\xi\tau} - n_{0\xi\xi\xi}) = \frac{\partial v_1}{\partial y^2} - \frac{\partial P_1}{\partial y} - (u - \lambda) \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \quad (34)$$

令左边为零, 可知:

$$n_{1\xi\tau} - n_{0\xi\xi\xi} = 0 \quad (35)$$

把式(27)代入式(35)知:

$$f_1(\tau) = C_5\tau + b(\text{常数}) \quad (36)$$

令 $C_5 = i\alpha/\varepsilon^{1/2}$ 并代入式(28)知

$$(u - \lambda)g' - gu' = -\frac{i}{dRe}g'' \quad (37)$$

其中 α 表示一级近似解脉动速度波速。式(37)描述的是一级近似解振幅的控制方程。

3 孤立子解

对于方程(32), 具体分析起来是很困难的, 仅考虑如下极为简单的情形, 仍能说明不少问题。

$$\pi_t + \pi\pi_x - \nu\pi_{xx} + \gamma\pi_{xxx} = 0 \quad (38)$$

其中, $\pi = \pi(x, t)$; ν, γ 为常数。

文献[3]认为, 对湍流研究有重要意义的是方程(38)的鞍-焦异宿轨道的行波解。

$$\text{令} \quad \pi = \pi(\eta) = \pi(x - \beta t) \quad (39)$$

式中 β 为行波波速, 是参变数。

将式(39)代入式(38)知

$$(\pi - \beta)\dot{\pi} - \nu\ddot{\pi} + \nu\ddot{\pi} = 0 \quad (40)$$

$$(\pi - \beta)\dot{\pi} - \nu\ddot{\pi} + \frac{1}{2}\pi^2 - \beta\pi = A \quad (41)$$

A 是积分常数。

$$\text{取} \quad \pi_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 + 2A} \quad (42)$$

$$\pi_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 + 2A} \quad (43)$$

其中 $\beta^2 + 2A > 0$ 。 π_1, π_2 代表式(40)在相平面 $(\pi, \dot{\pi})$ 上两平衡点 $A(\pi_1, 0)$ 和 $B(\pi_2, 0)$ 。

a. 正耗散($\nu > 0$)和正色散($\gamma > 0$)时($\nu < 0, \gamma > 0$ 与此类似), 方程(38)的解^[3]为

$$\pi(x, t) = \begin{cases} \pi_1 + \frac{\pi_1 - \pi_2}{2} e^{\frac{\nu}{2\gamma} \eta} \cos \sqrt{\frac{\pi_1 - \pi_2}{2\gamma} - \left(\frac{\nu}{2\gamma}\right)^2} \eta & \eta \in (-\infty, 0) \\ \pi_2 + \frac{3(\pi_1 - \pi_2)}{2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{\pi_1 - \pi_2}{8\gamma}} \eta & \eta \in [0, +\infty) \end{cases} \quad (44)$$

其图形如图 1 所示。

b. 正耗散($\nu > 0$)和负色散($\gamma < 0$)时($\nu < 0$ 和 $\gamma < 0$ 与此类似), 方程(38)的解^[3]为

$$\pi(x, t) = \begin{cases} \pi_1 - \frac{3(\pi_1 - \pi_2)}{2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{\pi_1 - \pi_2}{-8\gamma}} \eta & \eta \in (-\infty, 0) \\ \pi_2 - \frac{\pi_1 - \pi_2}{2} e^{\frac{\nu}{2\gamma} \eta} \cos \sqrt{\frac{\pi_1 - \pi_2}{2\gamma} - \left(\frac{\nu}{2\gamma}\right)^2} \eta & \eta \in (0, +\infty) \end{cases} \quad (45)$$

其图形如图 2 所示。

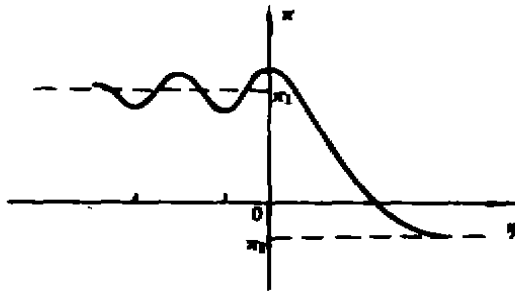


图 1

对于图 1 的行波, 当以速度 β 向右移动时, 该波的前方首先被状态 π_2 控制, 慢慢地进入耗散项几乎不起作用的孤立波一段。当波的振幅达到最大值后, 场便被耗散所引起的衰减振荡所控制, 波的振幅和尺度逐渐衰减, 最后被状态 π_1 所控制。能量逐渐耗散。

对于图 2, 当行波以速度 β 向右移动时, 波的耗散作用由大变小, 涡旋尺度增大。相应于能量由分散到集中。

纯粹的 K-dv 方程或 Burgers 方程及其它类型的孤立子方程, 可参见文献 [4]。笔者认为, 和湍流关系密切的是 B-kdv 方程。

4 二维平行壁面剪切流中内部结构初探

在对一阶近似方程进行求解时, 将解设

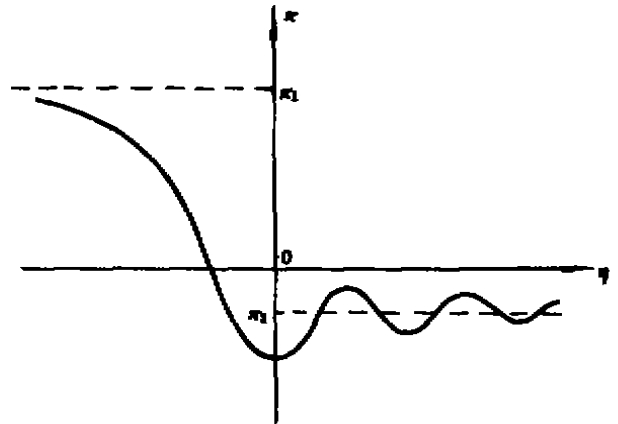


图 2

定为式(18)的形式, 认为 y 和 (ξ, τ) 是解耦的。在 x 和 y 方向上扰动的分布是同一类型的波, 仅其振幅有所不同(是时空坐标的函数)。但 x 方向上的扰动是由于行波的传播所引起的, y 方向上无行波的展布, 行波的振幅引起扰动。这种设定, 分析 x 方向上流动情形所得结果会更合乎实际, y 方向上则不然。

在得到方程(32)时, 我们是一级扰动解代入二级近似方程, 这其实是一级扰动波能量和二级扰动波能量相互耦合的部分。能量级串过程是一种能量传输过程。方程(32)所描述的是湍流度的情形或湍流度由低

向中变化的过程。由式(37)可知,一级扰动波振幅和平均流密切相关。

湍流的实验研究表明,湍流内部的能量级串过程会逐渐耗散和衰减,最终因粘性作用转化为热能等,能量逆转现象在特定条件下也会发生并为实验所证实。能量向下一级传递的仅是本级所携带能量的一部分,且能量传递是动态的、双向的,各阶扰动都迭加在平均流之上。令方程(32)的右边为零,则此时该方程描述了同一种类型的扰动波中其自相似部分的能量级串过程,该类型扰动波保留到下一级时自身所携带的动量的变化情况及其相应的能量。式(38)进一步简化了假定,考虑系数是常数的情形。作为近似,这是极为粗糙的,但仍可得到不少启示。

方程(38)中含有非线性项、耗散项和色散项。虽为弱非线性但可导致混沌的产生,总的作用是使能量集中。耗散项可使机械能转化为热能,正色散使能量分散,正色散和负色散的相互作用可形成孤立波。孤立波的重要特性是既有粒子性:传播过程保持形状不变很像粒子;又有波动性:相遇时像波一样彼此通过。作为原方程的式(32),系数和右边项的多变性、非线性、耗散、色散间相互关系的变化,其运动形式也必然是千变万化的,不同运动形式的迭加形成内部能量不同的分配形式和结构特征。

方程(32)和(34)表明,湍流内部的扰动在沿流向和展向方向上,既有一定独立性又互相联系,都受平均流的影响,相似的运动形式可以演化为毫无联系的运动,也可以相反。这和湍流具有强烈的三维性是一致的。

由牛顿定律控制的力学运动的数学方程中本身就含有稳定少变的孤立波,其解具有波粒二重性又可产生混沌,从物理上看混沌

其实是一种相。由方程(32)和(34)可以看出,即使是同一种运动形式的演化,它也继承了上一级扰动(或平均流)历史的信息,同时又按自身规律演化。事实上,湍流运动及相应的内部结构如拟序结构、能量分布等都有明显的记忆特征,层流向湍流转换更为明显,对初始条件边界条件都很敏感。湍流(包括正在转换的湍流)是一个耗散体系,大量涡会缠绕、扭合。近来研究表明,波和涡关系密切,波中可以有涡,涡中可以有波。波涡之间存在非线性非定常作用,不仅涡会发生波而且波也会产生涡。前者包含涡能向波能的转化,后者是波能向涡能的转化——这是一种分散能量向集中能量的转化。湍流内部的相干结构可能是波包调制的结果。

5 结 论

二维平行壁面剪切流的失稳,可能是由于一些扰动,在流体运动过程中其演化的不同步,经过互相作用如自激合并、分裂、卷吸等,能量重新分配,通过倍周期迭加、相锁、分叉等途径,最后进入混沌态,完成失稳过程。其后产生强烈紊动出现相干结构等现象。

(本文工作曾得到肖勇博士的帮助,特致谢意。)

参考文献

- 1 杨立等,二维平行壁面剪切流动的转换与混沌模型,见:中国力学学会编,第四届全国湍流与流动稳定性会议论文集,南京,1994,72~76
- 2 戴世强,约化摄动法和非线性波远场分析,力学进展,1982,12(1):2~23
- 3 刘式达等,湍流的Kdv-Burgers方程模型,中国科学A辑,1991,(9):938~946
- 4 谷超豪等,孤立子理论与应用,杭州:浙江科学技术出版社,1990

(收稿日期:1994-06-16)