

④

岩石力学

分形几何

分形模型

集聚

15-20126

岩石力学中的分形几何

徐永福

TU 45

(河海大学地质及岩土工程系 南京 210098)

摘要 本文综述了分形几何在研究岩石断裂分布、岩石断裂面的粗糙度、岩石微破裂过程和地震,以及岩石碎屑等方面的成果。分形几何很好地描述了岩石力学中的不规则性和不确定性,并已得到广泛的应用。分数维具有实实在在的物理意义,是一个真实的物理量,文中对分数维的物理意义进行了讨论。

关键词 分形几何 分数维 岩石力学 尺规不变性 重正化群 集聚 分形模型

岩石力学是固体力学的一个分支。岩石材料的力学行为具有不确定性和不规则性,不同层次(不同尺寸)的岩石材料,其力学行为具有相似性。面对岩石力学的这种不规则性,经典的数学力学模型显得无能为力。“由于岩石和土的复杂性,需要发展一些全新的思想和方法,……”^[1]。分形几何(fractal geometry)^[2]自1983年形成以来,已被广泛应用于岩石力学中,如岩石断裂、岩石碎屑、岩石节理面的粗糙度、地震预测、地质构造及岩爆等。“分形几何在岩石力学研究中开创了一个新的生长点……”^[1]。

1 分形几何的概念

分形(fractal)一词最先是由法国数学家Mandelbrot^[2]引入的,源于拉丁语的形容词fractus(破碎),Mandelbrot将其解释为不规则(irregular)或破碎的意思。Mandelbrot最初定义分形为Hausdorff维数严格大于其拓扑维数的集合,后来他发现这个定义不太严格,只包括了那些具有自相似性的分形,而绝大多数复杂的分形都被排斥在外。分形几何现已被广泛用于研究自然界中常见的、不稳定

的、不规则的现象,即研究自然界中没有特征长度,而具有自相似性的形状和现象,如海岸线、山的起伏、河网水系、地震、湍流、凝集体、相变、动物血管系统、肺膜结构、气候的变化,以及股市的变动、人口的分布、足球运动员的跑动路线等等。毫不夸张地说,分形几何遍布整个自然界,大到宇宙星云分布、小到准晶态的晶体结构。

分形几何中,最主要的概念是分数维(fractal dimension)。早在1919年,Hausdorff提出了分数维数(fractional dimension)的概念,Mandelbrot^[2]将分数维数推广应用到分形几何中,分数维可以是分数、也可以是整数。确定分数维比较实用的方法有五种^[4]:①改变粗视化程度(尺寸)求分数维;②根据测度关系求分数维;③根据相关函数求分数维;④根据分布函数求分数维;⑤根据光谱求分数维。

分形几何主要是研究一些具有自相似性(self-similar)的不规则曲线,具有自平演化(self-inverse)的不规则曲线,具有自平方性(self-squaring)的分形变换和具有自仿射(self-affine)分形集。而所谓的线性分形即具

有自相似性的分形是分形几何的主要内容,线性分形的维数变化是连续的。简单地说,自相似就是局部是整体按比例缩小的性质,也称尺规不变性或尺度无关性(scale invariant)^[2],即在不同放大倍数的放大镜下观察对象,其“影象”都是一样的、与放大倍数无关。例如,弯弯曲曲的海岸线,在统计意义上是相似的,Mandelbrot^[5]测出英国海岸线的分数维 $D=1.2$ 左右。再如,自由粒子无规则运动的布朗曲线,在统计意义上也是自相似的,其分数维 $D=2.0$ 。在数学上,有许多著名的奇异图形都是分形,如 Cantor 曲线、Koch 曲线、Sierpinski 填料和 Menger 海绵(图 1)。

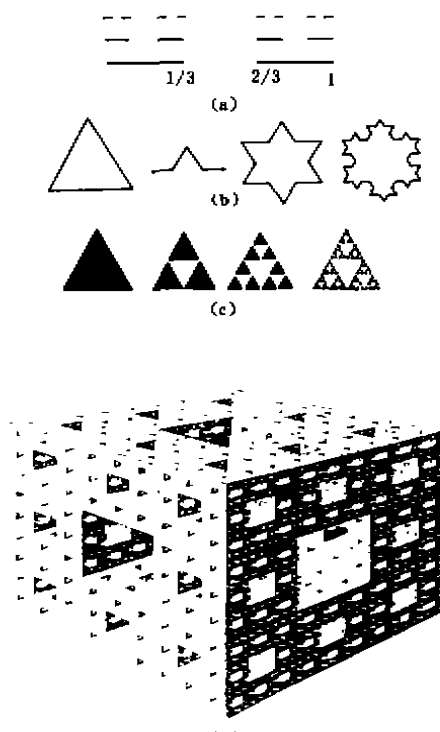


图 1 常见的几种自相似分形

- (a)Cantor 集(灰尘), $D=\log 2 / \log 3=0.6309$;
(b)Koch 雪花, $D=\log 4 / \log 3=1.2618$;
(c)Sierpinski 地毯, $D=\log 3 / \log 2=1.585$;
(d)Menger 海绵, $D=\log 20 / \log 3=2.7268$

2 岩石断裂的分形

2.1 岩石的分形破裂

Louis 等^[6]用计算机模拟了不同边界条件下,各种物理性质的材料破裂的自相似特性,其自相似分维 $D=1.6$ 左右。

谢和平^[7]提出岩石微破裂的分形模型(图 2)。图 2(a)中, $N=2, r=1/1.732$, 分数维 $D=\log 2 / \log 1.732=1.26$; 图 2(b)中, $D=\log 4 / \log 3=1.26$; 图 2(c)中, $D=\log 3 / \log 2.236=1.37$; 图 2(d)中, $D=\log 5 / \log 3.605=1.26$ 。

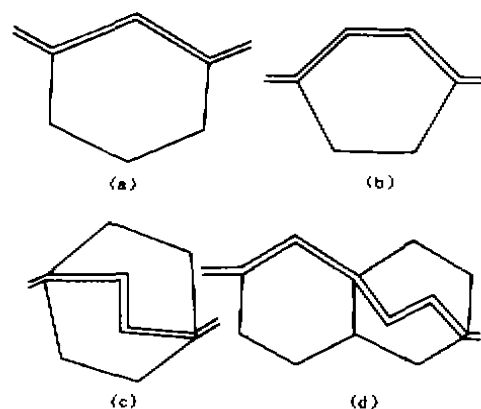


图 2 微破裂的分形模型^[4]

- (a),(b)沿晶破裂;(c)穿晶破裂;
(d)沿晶、穿晶耦合破裂

T. Hirata 等^[8]用 Oshima 花岗岩的三轴试验(围压 40MPa)中的声发射特征,研究了微破裂的分形过程,并推广到地震事件,认为在主大震发生前,破裂的分维数减小。对于声发射 $(p_1, p_2, \dots, p_N)$, 相关积分 $C(r)$ 为

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} N_r \quad (R < r) \quad (1)$$

这里, N_r 是 $r > R$ 的声发射对 (p_i, p_j) 的数目, R 可以表示时间,也可以表示距离。相应地有:

$$C(r) \propto r^{-D} \quad (2)$$

D 即为声发射对应的微破裂的分数维。谢和平^[9]利用上述相关积分,研究了美国 Galena

矿中岩爆的分形特征,发现微地震事件具有集聚(Cluster)分形结构。当接近一个主岩爆时,微地震事件的集聚程度明显增加,并相应地出现分数维减小的现象。最小的分形维数出现在主岩爆时。可见微破裂是一个分形过程。

2.2 岩石破裂面的分形特征

谢和平^[7]在光学显微镜下观察了岩石断裂面;发现断裂面是像云彩一样的岩石岛。在不同放大倍数下测得的一系列周边长度和断面面积,在双对数坐标中是一条直线(图3)。

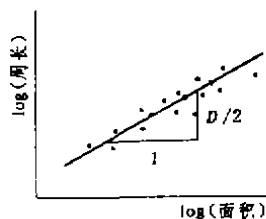


图3 岩石断裂面的分数维^[7]

由直线斜率得到分数维 D 为

$$D = 2\Delta\log(\text{周长})/\Delta\log(\text{面积}) \quad (3)$$

分数维 D 是断面不规则程度的量度, D 越大,偏离标准图形越远,不规则程度越大。

谢和平^[9]认为节理剖面粗糙度具有有限生长的分形结构,根据节理面凸起体的平均基底长度 L^* 和平均高度 h^* 两参数,可直接得到节理剖面的分数维 D

$$D = \frac{\log 4}{\log[2(1 + \cos \alpha)^{-1}(2h^*/L^*)]} \quad (4)$$

分数维 D 与节理粗糙度具有密切关系。

Aviles 等^[10]和 Okubo 等^[11]用类似于 Mandelbrot^[5]测量英国海岸线分数维的方法,分析了 San Andres 断层的分数维,这样测得的分数维反映了断层的粗糙度。

2.3 岩石断裂的分形分布

Borton^[12]最早用分形几何来研究岩石断裂的分布,得到断裂分布的分数维 D 介于 1.0~2.0 之间。谢和平^[13]通过现场和实验观察,发现断裂区的雁型裂纹(Riedel 剪裂纹)

具有分形结构,并用有限生成步的 Cantor 集模拟了雁型裂纹(图4),给出雁型裂纹的分数维 D

$$D = \log N / \log(2L/S) \quad (5)$$

式中 N 为雁型裂纹的数目; L 为雁型裂纹的总长度; S 为雁型裂纹之间的间距,可由第 n 生成步构造得到,图4中 S 为

$$S = 2(L/4^n) \quad (6)$$

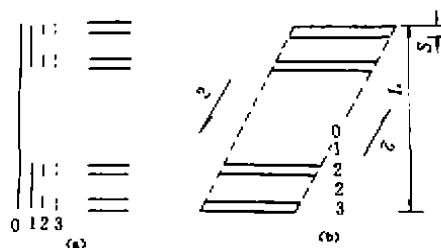


图4 雁型裂纹系统的分形模型^[13]

Michele 等^[13]用卫星图像,地形图上水系分布和航片及地面照片,分析了非洲地区宏观断裂和中观断裂的分形分布,发现在三种不同尺寸下,同一地区断裂分布的分形特征相同;而不同地区(Assaba-Tagant 和 Central Africa 地区),断裂分布的分形特征不一样,因此,分形特征反映了各地区的地质构造演化特征和岩石力学特征。

确定断裂分布的分数维的方法分为两类;一类为处理一维断裂数据的方法,主要有分布密度法(spacing population method)、间计法(interval counting method)和断裂数间计法(the fracture number interval counting method)三种;另一类为处理二维断裂数据的方法,主要有盒计法(box-counting method)和断裂数盒计法(the fracture number box-counting technique)两种。下面简略介绍这两类方法。

分布密度法是由 Harris 等^[14]提出的,把相邻破裂间的距离 S 和破裂累积数 N (N 是间距 $\geq S$ 的破裂总数)投到双对数坐标中,直线斜率即为破裂分布的分数维。这种分维 D_1 度量了断裂分形集聚程度,即低的分数维

代表了大间隔和强集聚的分形分布。间计法和断裂数间计法与盒计法和断裂数盒计法是一样的。盒计法是用边长为 d 的盒子(广义盒子)覆盖在断裂分布图上,数出包含断裂的盒子总数 N_d ,则有:

$$N_d \propto d^{-D_{2b}} \quad (7)$$

D_{2b} 即为断裂分布的盒维数。La Pointe^[15]改进了盒计法,数出每个盒子中的断裂数,求出所有盒子中的断裂总数 N_d ,则有:

$$N_d \propto d^{-D_{2d}} \quad (8)$$

D_{2d} 即为断裂分布的盒维数。

上述五种方法求出的断裂分布的分数维,反映了断裂分布的不同信息。从各自的角度反映了断裂分布的分形特征,因此其分数维的值也不一样,且有一定范围和相互转化关系(表1)。

表1 各种方法的分数维值的范围

方 法	分数维的范围
一维方法:	
分布密度法	$0 < D_1 < 1.0$
间 计 法	$0 < D_2 < 1.0$ $D_2 = D_1$
断裂数间计法	$1.0 < D_3 < 2.0$ $D_3 = D_1 + 1.0$
二维方法:	
盒 计 法	$1.0 < D_{2b} < 2.0$
断裂数盒计法	$2.0 < D_{2d} < 3.0$ $D_{2d} \leq D_{2b} + 1.0$

3 岩石碎屑的分形

大量的研究表明,岩石破碎、风化、爆炸产生的碎屑分布具有指数关系($N(r) \propto r^{-D}$),并且岩石碎屑具有尺度无关性^[16~21]。具有这种性质的碎屑还有火山灰、陨石、小行星、星际粒子以及各种土粒,见表2^[18]。

黄暹等^[16]借助于有规分形,构造了有限自相似尺度分布集合,从而导出了真实颗粒体系的分形粒度分布(fractal size distribution—FSD)模型,得到用粒数密度表示的FSD严格定量关系,即

表2 各种碎屑的分形维数^[18]

碎屑类型	分形维数
灰尘和浮石	3.54
小行星	3.05
石陨石(雨)	3.00
冰 碛	2.88
砂和砾石	2.82
砂质粘土	2.61
玄武岩碎屑	2.56
小行星(理论分析)	2.51
星际粒子	2.50
煤爆碎屑	2.50
核爆碎屑	2.50
小行星(理论上)	2.48
岩石化学风化碎屑	2.42
花岗岩碎屑	2.22
片麻岩碎屑	2.13
石英的人工压碎碎屑	1.89
陶 石	1.86
含铜辉长岩碎屑	1.71
含铅辉长岩碎屑	1.44

$$N(>L) \propto L^{-D} \quad (0 < L < +\infty) \quad (9)$$

式中 L 为颗粒粒径; N 为颗粒累积数。并从动力学的角度给出了颗粒分形过程的判据。粒子变化速率为

$$L^{b-1}dL/dt = g(t) \quad (10)$$

$b=0$ 时,式(10)变为

$$d(\ln L)/dt = g(t) \quad (11)$$

因此,只有 $b=0$,颗粒体系才具有分形分布, $\ln N \sim \ln L$ 才能保持直线。

Samiss^[17]在分析断层泥的碎屑分布时,发现断层泥中的碎屑具有分形分布特征,其分维数 D 介于 2.0~3.0 之间,并建立了断层泥中碎屑分布的分形模型(图5),根据这个分形模型,碎屑分布的分数维 $D = \log 6 / \log 2 = 2.58$ 。

Brow^[3]等根据碎屑的泊松分布给出碎屑质量分布的公式

$$N(m) = Cm^{-b} \quad (12)$$

这里 C 是常数,注意到 $m \propto r^3$,则得到碎屑质量分布的分数维^[18]:

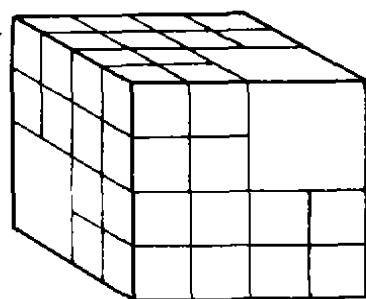


图5 断层泥中碎屑分布的分形模型^[17]

$$D = 3b \quad (13)$$

由碎屑粒径分布

$$M(r)/M_T = 1 - \exp[-(\frac{r}{\sigma})^a] \quad (14)$$

这里 $M(r)$ 是碎屑直径小于 r 的质量, M_T 是碎屑的总质量, σ 是碎屑的平均粒径, 若 $r \ll \sigma$, 则式(14)变为

$$M(r)/M_T = \left(\frac{r}{\sigma}\right)^a \quad (15)$$

注意到① $dM \propto r^{a-1} dr$, ② $N \propto r^{-D}$, 即 $dN \propto r^{-(D+1)} dr$, ③ $dN \propto r^{-3} dM$, 则得到 D ^[18]

$$D = 3 - a \quad (16)$$

若 $f(m) = Am^{-s}$ (17)

这里 $f(m)dm$ 是质量介于 $m \sim (m+dm)$ 之间的碎屑质量, 得到碎屑分布的分数维 D ^[18]

$$D = 3(S - 1) \quad (18)$$

Turcotte^[19]用重正化群方法的基本假设是假定各种层次碎屑破碎成8个次一级碎屑的机率 p_c 是一致的, 这样可得到第 m 次层次的碎屑总数(图6)

$$N_m = (1 - p_c)[1 + 8p_c + (8p_c)^2 + \dots + (8p_c)^m]$$

$$N_{m+1} = (1 - p_c)[1 + 8p_c + (8p_c)^2 + \dots + (8p_c)^m + (8p_c)^{m+1}] \quad (19)$$

则有 $N_{m+1}/N_m = 2^D$, 即

$$D = \ln(8p_c)/\ln 2 \quad (20)$$

进一步考虑将碎屑分为易碎的碎屑(即碎屑中布满了微破裂)和完整的碎屑(即碎屑中没有微破裂)两种。这时, 第 n 层次的碎屑是易碎的碎屑的机率 p_{n+1} 依赖于 p_n ^[18]。这样, 分

数维依赖于分形模型。

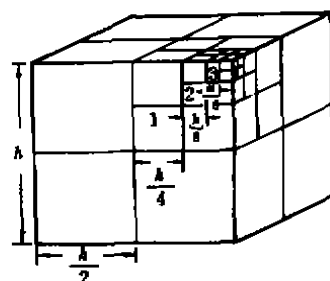


图6 用重正化群建立的碎屑分形模型^[19]

Zhao 等^[19]在 Turcotte 基础上, 考虑了①碎屑形状对分形影响, ②随着测量轴线的变化, D 也变化, ③分数维随着破裂型式变化而变化, 建立了新的碎屑分布模型。假设碎屑每次破碎的基数为 B , 则

$$B^E = N_f + A \quad (21)$$

式中 E 为欧拉维数; N_f 为能破裂成下一级碎屑的数目; A 为保持不破碎的碎屑数目。这样

$$D = \log N_f / \log B \quad (22)$$

根据这个模型, 可以得到碎屑分布的分数维 D 为

$$\begin{aligned} D &= \log N_f / \log B \\ &= -(\text{粒径} - \text{频度双对数直线的斜率}) \\ &= -2(\text{面积} - \text{频度双对数直线的斜率}) \\ &= -3(\text{体积} - \text{频度双对数直线的斜率}) \end{aligned} \quad (23)$$

4 岩石力学中分数维的物理意义及其应用

根据以往的研究, 发现分数维是一个实实在在的物理量, 具有实在的物理意义, 并被应用于岩石力学中。

a. Turcotte^[21]发现, 断层滑动速率与分数维具有下列关系:

$$\begin{aligned} v_1/v &= 1 - 2^{-(3-D)} \\ v_n/v &= [1 - 2^{-(3-D)}] \times 2^{-(3-D)(n-1)} \end{aligned} \quad (24)$$

这里, v 是断层滑动的总速率, v_1 和 v_n 分别

是第 1 级和第 n 级次断层的滑动速率。

b. 地震震级 m , 地震次数 N 和地震矩 M 有关系式: ① $\log N = a - bm$; ② $\log M = cm + d$, 其中 a, b, c, d 是常数, 且 $0.5 < b < 1.5$, 地震分布的分数维 D 与 b 成正比^[21]

$$D = 3b/c \quad (25)$$

谢和平^[9]得到关系式为

$$D = 3b \quad (c = 1)$$

c. 谢和平等^[9]发现节理粗糙度 (JRC) 与分数维 D 密切相关

$$JRC = 85.2671(D - 1)^{0.5679} \quad (26)$$

d. 谢和平等^[9]发现岩爆中岩体破裂的分数维与释放的能量 E 呈指数相关

$$D = C_1 \exp(-C_2 E) \quad (27)$$

e. 谢和平^[7]把分数维与裂纹扩展力 G_{crit} 和扩展速率联系在一起。裂纹的临界扩展力 G_{crit} 为

$$G_{crit} = 2\gamma_s(1/r)^D \quad (28)$$

γ_s 为单位宏观量度的面积的表面能。扩展速率 $\dot{a}$ 为

$$\dot{a} = \dot{a}_0 \cdot l^{D-1} \quad (29)$$

式中 $\dot{a}_0$ 为宏观意义下裂纹的扩展速率; l 为晶粒尺寸。

5 讨 论

分形几何是一门新学科, 它处理“奇异”曲线和图形是有很有效的。因此它被用来研究岩石的破裂和岩石碎屑的特征。然而, 经典数学中处理光滑曲线和图形的理论, 如微分理论就不可能应用到分形几何中, 这就限制了分形几何的理论发展, 也就是说影响了分形几何的研究深度。象岩石破裂和碎屑这种没有特征长度的“奇异”现象, 光用统计方法计算出它的分数维, 而不把分数维与熟知的物理量联系起来, 分数维就没有实际意义, 在实践中无法应用。因此, 应深入探讨分数维的物理意义, 象在欧氏几何中讨论光滑图形一样, 在分形几何中研究“奇异”现象。

分形几何实际是研究“奇异”现象的尺规不变性。尺度无关区是以尺寸 r 把研究对象分成 N 个相似的部分, $\log r \sim \log N$ 成直线的区间。在尺度无关区内, 各层次(尺寸)间存在着一种固定不变的变化规律, 这种变化规律可以用分数维来描述。在尺度无关区以外, 分形几何无法描述, 因此分数维与整数维一样有其局限性。

因此, 对于分数维的意义及应用还有待进一步探讨。

本文得到殷宗泽教授的指导和帮助, 谨此致谢。

参考文献

- 1 Walsh J J. The importance of small-scale faulting in regional extension. *Nature*, 1991, 351:391~393
- 2 Mandelbrot B B. The fractal geometry of nature. W H Freeman, San Francisco, 1982
- 3 Brown, Blight. Fragmentation of the universe. *Astrophys Space Sci*, 1983, 94:401~412
- 4 高安秀树. 分数维. 沈步明译. 北京: 地震出版社, 1989
- 5 Mandelbrot B B. How long is the coast of Britain. *Science*, 1967, 155:636~638
- 6 Louis E, Guinea F, Flores F. The fractal nature of fracture. In: *Fractals in phys.*, Elsevier Science Publishers B V, 1986:177~180
- 7 谢和平. 大理岩微破裂的分形模型研究. *科学通报*, 1989, 34(5):365~367
- 8 Hirata T, Takashi Satoh, Keisuke Ito. Fractal structure of spatial distribution of microfracturing in rock. *Geophys J R Astr Soc*, 1987, 90:369~374
- 9 Xie H P. *Fractals in rock mechaniss.* A A Balkema, Rotterdam, Brook-field, 1993
- 10 Aviles, Scholz. Fractal analysis applied to characteristic segments of San Andress fault. *J Geophys Res*, 1987, 92(B1):331~334

(下转第 26 页)

- 1985(12):1121~1128
- 4 楼森岳. 推广的 Boussinesq 方程和 kdv 方程——Painleve 性质、Backlund 变换和 Lax 对. 中国科学 A 辑, 1991(6):622~631
 - 5 朱佐农. 含外力项的广义 kdv 方程的类孤子解. 物理学报, 1992, 41(10):1561~1566
 - 6 周显初. 分层流体中孤立波的分裂. 中国科学 A 辑, 1987(10):1071~1080
 - 7 王本仁. 参量激励圆柱槽中的强迫孤立波. 中国科学 A 辑, 1992(1)
 - 8 周显初等. 表面张力对非传播孤立波的影响. 中国科学 A 辑, 1992(12)
 - 9 陈陆君等. 水槽中孤波相互作用的微扰变分分析. 物理学报, 1992, 41(10):1745~1752
 - 10 熊树林. Burgers-kdv 方程的一类解析解. 科学通报, 1989(1):26~29
 - 11 刘式达等. 孤立波和同宿轨道. 力学与实践, 1991, 13(4):9~15
 - 12 刘式达等. 湍流的 kdv-Burgers 方程模型. 中国科学 A 辑, 1991(9):938~946
 - 13 Shtilman L, et al. On some kinematic versus dynamic properties of homogeneous turbulence. J Fluid Mech, 1993, 247:65~77
 - 14 Ruetsch G R, et al. The evolution of small-scale structure in homogeneous isotropic turbulence. Phys Fluids A, 1992, 4(12): 2747~2760
 - 15 Nobumitsu Yokai, et al. Statistical analysis of the effects of helicity in inhomogeneous turbulence. Phys Fluids A, 1993, 5(2):464~477
 - 16 Alexander, et al. The sweeping decorrelation hypothesis and energy-inertial scale interaction in high Reynolds number flows. J Fluid Mech, 1993, 248:493~511
 - 17 Javier, et al. The rollup of a vortex layer near a wall. J Fluid Mech, 1993, 248:297~313
 - 18 Uriel Frisch, et al. A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. J Fluid Mech, 1978, 87:719~736
 - 19 田立新等. 耗散孤立波方程的吸引子. 应用数学和力学, 1994, 15(6):539~547

(收稿日期:1994-10-10)

(上接第 20 页)

- 11 Okubo P G, Keiti Aki. Fractal geometry in the San Andress fault system. J Geophys Res, 1987, 92(B₁):345~355
- 12 Barton fractal geometry of two-dimension fracture networks at Yucca Mountain, Southwest Nevada. In: Stephannson ed. On Fundamentals of Rock Joints, Bjorkkliden, Sweden, 1985:77~84
- 13 谢和平. 雁型断裂的分形模型和能量耗散. 岩土工程学报, 1994, 16(1):1~17
- 14 Harris. Fractal analysis of fracture in rocks. Tectonophys, 1991, 198:107~115
- 15 La Point. A method to characterize fracture density and connectivity through fractal geometry. Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr, 1988, 25:421~429
- 16 黄暹, 柯家骏. 分形粒度分布模型及颗粒过程的统一性. 见:第二届分形大会论文集. 合肥:中国科学技术大学出版社, 1992:294~297
- 17 Samiss C G, Robert H O, Anderson J L, et al. Self-similar cataclasis in the formation of fault gouge. Pure & Applied Geophys, 1986, 124: 53~78
- 18 Turcotte. Fractal and fragmentation. J Geophys Res, 1986, 91(B₂):1921~1926
- 19 Zhao Zhongyan, Wang Yi, Liu Xiaohan. Fractals analysis applied to cataclastic rocks. Tectonophys, 1990, 178:373~377
- 20 徐永福, 张耀华, 田美存等. 围压对砂岩破碎分形特征的影响. 河海大学学报, 1995, 23(4):24~28
- 21 Turcotte. A fractal model for crustal deformation. Tectonophys, 1986, 132:261~269

(收稿日期:1995-01-27)