

(6)

土力学

分形几何

微结构

土壤学

第16卷第1期

水利水电科技进步

1996年2月

25-29

土的分形微结构

徐永福

田美存

T4 43

(河海大学地质与岩土工程系 南京 210098)

摘要 本文综述了土粒表面、土粒分布、土孔隙的表面和分布的分形特征,以及土的分形微结构在土力学和土壤学中的应用。

关键词 分形几何 土力学 微结构 土壤学

土是人类赖以生存的基础。土的工程性质和土壤肥性与土的物质组成、微观结构密切相关。广义而言,土的微结构包括三个方面的含义:①土中固、液、气等基本结构要素的大小、形态和相互关系;②各要素的定量特征;③固、液、气之间的相互作用和联结特征。^[1]土颗粒的大小、形态是土的微结构的主要内容。土粒的相互关系决定了土中的液气特征^[2]。土颗粒和由其联结形成的孔隙是不规则的,没有特征长度,因此传统理论显得无能为力。分形几何(fractal geometry)形成以来,已被广泛应用于各门学科中,并成功地描述了土颗粒的形态、分布及孔隙的形态和分布。分形几何为研究土的微结构提供了新思路。

1 土粒的分形特征

1.1 土粒的分形分布

经典颗粒分析中, Gaudin-Schuhmann 分布和 Rosin-Rammler 分布都是分形分布。Moyurn Ochui 等^[3]从能量角度进行理论推导,发现固体颗粒的形成过程是分形的。假定在时刻 t 颗粒的分布函数为 $P(r, t)$, 即粒径小于或等于 r 的颗粒的质量百分数, 又称之为质量累积百分数。颗粒的形成过程是大颗粒破碎的过程, 可以认为这个过程是

连续的, 即分布函数 $P(r, t)$ 是连续函数。在时间 dt 内, 粒径介于 $r \sim r + dr$ 的颗粒质量为 $(\partial/\partial t)[\partial P(r, t)/\partial r] \cdot dr \cdot dt$ 。在颗粒破碎过程中, 粒径介于 $r \sim r + dr$ 的颗粒破碎成更细的颗粒, 其质量为 $S(r) \cdot dt[\partial P(r, t)/\partial r] \cdot dr$, 式中 $S(r)$ 是颗粒的破碎速率; 同时, 粒径大于 r 的颗粒破碎为粒径为 r 的颗粒, 其质量为(假定破碎率不变)

$$\int_r^{r_{\max}} S(a) dt \cdot \frac{\partial P(a, t)}{\partial a} \cdot \frac{\partial B(r, a)}{\partial r} \cdot dr da \quad (a > r)$$

式中 $B(r, a)$ 是由粒径为 a 的颗粒破碎成粒径为 r 的颗粒的分布函数。由质量守恒定律可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \cdot dr dt \\ &= - S(r) \cdot \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \cdot dr dt + \int_r^{r_{\max}} S(a) \\ & \cdot \frac{\partial P(a, t)}{\partial a} \cdot \frac{\partial B(r, a)}{\partial r} dr da dt \quad (1) \end{aligned}$$

研究表明, $S(r) = k \cdot r^\lambda$, $B(a, r) = (r/a)^\lambda$ 。为了简单起见, 令 $P(r_{\max}, t) = 1$, 则

$$P(r, t) = 1 - \exp(-kr^\lambda t) \quad (2)$$

令 $kt = r_c^{-\lambda}$, r_c 相当于度量尺寸, 可以假设 $r_c = 1$, 所以当 $r \ll r_c$ 时有

$$P(r, t) = r^\lambda \quad (3)$$

由分形关系式 $N(r) \sim r^{-D}$, 可以得到颗粒分布的分维 D 为

$$D = 3 - \lambda \quad (4)$$

实际资料统计表明, 土粒分布具有典型的分形分布, 其分维介于 2.0~3.0 之间。刘玉松等^[4]统计了黄土、膨胀土和红土的颗粒分析资料, 发现三类土的分维介于 2.0~3.0 之间, 并且 $D_{\text{红土}} > D_{\text{膨胀土}} > D_{\text{黄土}}$, 由此认为黄土处于土演化的低级阶段, 红土的演化程度较高。胡国瑞等^[5]测量了黄土的粒径、颗粒方向、颗粒扁圆度、比表面积、孔隙等结构要素的信息维数, 统计结果表明黄土的信息分形是多重分形或多标度分形(multifractal)(见图 1)。在常规三轴试验中, 黄土的信息维数与压力 P 密切相关

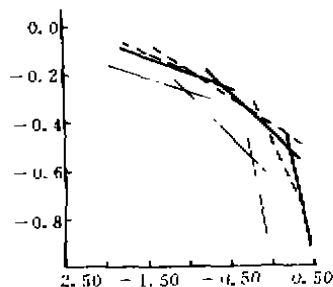


图 1 黄土结构要素的多重分形
——方向 ——扁圆度 --- 比表面积

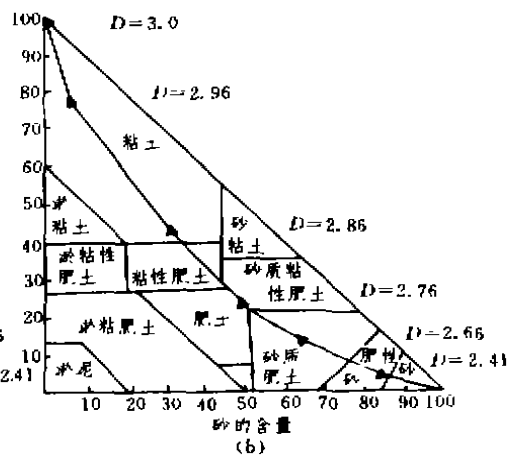
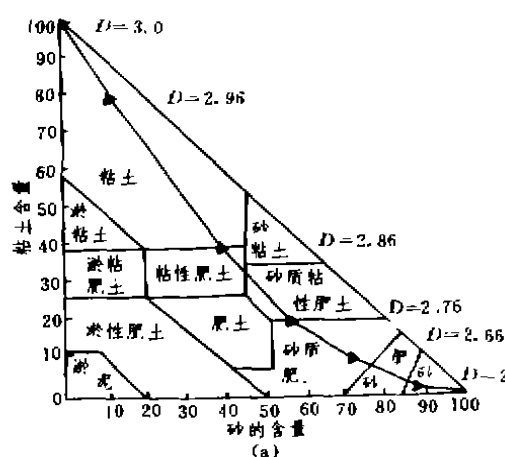


图 2 土粒分形分布的尺度范围

(a)最大粒径为 2.0mm;(b)最大粒径为 1.0mm(▲土样试验位置)。

$$D_1 = 0.0007 \cdot \ln P + 0.374 \quad (5a)$$

$$D_2 = -0.0081 \cdot \ln P + 0.362 \quad (5b)$$

$$D_3 = 0.0237 \cdot \ln P + 0.332 \quad (5c)$$

$$D_4 = 0.0563 \cdot \ln P + 0.447 \quad (5d)$$

$$D_5 = 0.0084 \cdot \ln P + 0.359 \quad (5e)$$

式中 D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 分别表示黄土的粒径、方向、扁圆度、比表面积和孔隙的信息维数, P 是压力。

Tyler 等^[6]讨论了土粒分形分布的尺度范围, 并在结构三角图上表示了分形分布的范围(见图 2)。土粒分布的分维一般介于 2.0~3.0 之间, 随着粘粒含量的增加, 土粒分布的分维增加(见图 3)。

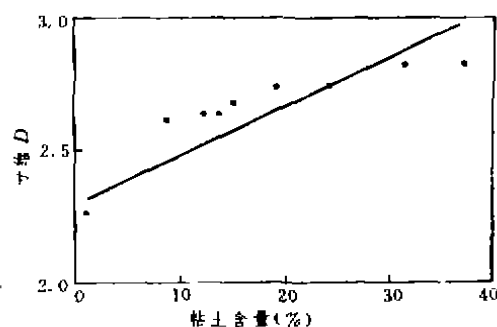


图 3 土粒分布的分维与粘粒含量的关系

自然界中的土并非都是单粒状, 而是多个颗粒粘结而成。Young 和 Crawford 分析了自然土团块分形分布的特征, 其分维为 2.75~2.93。

1.2 土粒的分形表面

土粒表面是粗糙不平的,不是想象的球状。Avnir 等^[7]发现土粒的表面积与土粒的平均半径呈非线性相关,土粒表面具有分形特征。Cohen & Knight^[8]将 7 个土样分成 12 个晶粒尺寸范围,用碱性孔雀绿的吸附量测量每个区间的粒子表面积,发现在整个粒子尺寸范围,样本分为两组:①精细粒子;②粗糙粒子。两组粒子都具有很好的分形特征。谢和平研究了不同磨碎机理下精细粒子的分形特征,并发现粒子尺寸分布的分维 D 和粒子表面的分维 D_s 都与磨碎机理及样本材料性质相关。

2 土的分形孔隙

2.1 土孔隙的分形表面

土的孔隙可分为 5 种类型^[2]:①土粒间孔隙;②土粒组间的孔隙;③土粒集合体间的孔隙;④土粒集合体内的孔隙;⑤土粒集合体通道(见图 4)。由于土粒表面是分形

的,毫无疑问,土的孔隙表面也是分形的。

土孔隙表面的分维等于土体表面的分维。一旦土体破坏,土集合体表面的分维就发生变化,因此土孔隙表面的分维很难测定。Katz & Thompson^[9]用扫描电镜图像和光学显微镜分析了砂岩孔隙表面的分形特征,孔隙表面的特征体数 $N(r)/\text{cm}$ 与特征体长度 l 在双对数坐标中的直线斜率为 $2-D$ (见图 5),分维 D 介于 $2.0 \sim 3.0$ 。Krohn & Thompson^[10]将这个方法发展为自动化技术,提高了精确度。Bale & Schmidt^[11]用小角度散射法分析了砂岩孔隙表面的分形特征。王域辉等^[12]给出了一条典型的多孔材料的完整的散射曲线(见图 6), $I(q) \sim q$ 在双对数坐标中可分为 4 个区,只有 Porod 区出现了一段线,Porod 区可以用来研究比平均孔隙尺寸小但比晶格原子结构大的材料结构。对于非分形材料

$$I(q) \propto q^{-4} \quad (q \text{ 是动量转移}) \quad (6)$$

对于自相似面分形

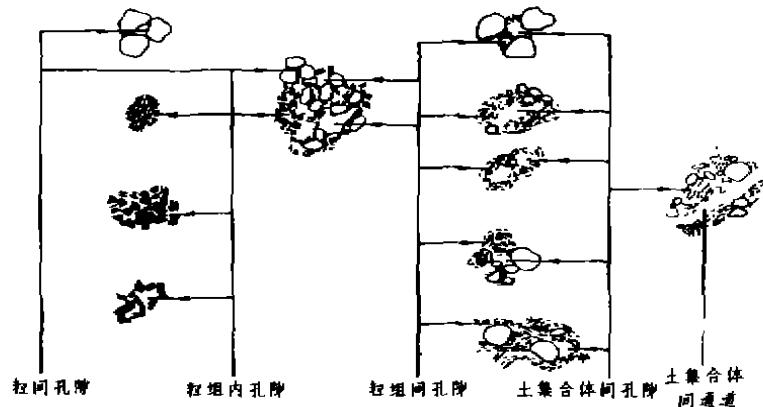


图 4 土孔隙的类型

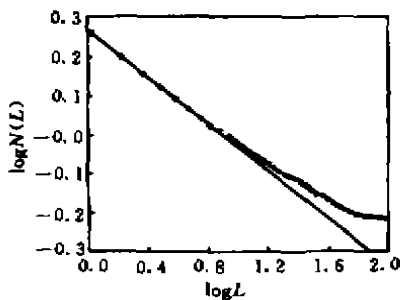


图 5 砂岩孔隙表面的分形特征

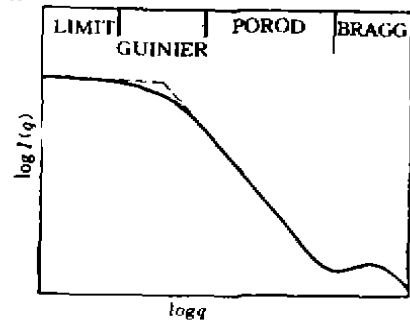


图 6 多孔材料的散射曲线

$$I(q) \propto q^{D-6} \quad (7a)$$

对于自仿射面分形

$$I(q) \propto Aq^{-4} + Bq^{-D} \quad (7b)$$

对于体分形

$$I(q) \propto q^{-D} \quad (7c)$$

A. Neimark^[13] 提供了一个测量孔隙分形表面分维的方法, 这个方法的理论根据是

$$S(a) \propto a^{2-d_f} \quad (8)$$

式中 $S(a)$ 是用尺子 a 测量的孔隙表面积; d_f 是孔隙表面的分维。用非湿液体 (nonwetting fluids), 如水银渗透到孔隙内, 由此确定孔隙的表面积 S_i (inscribed equicurvature surfaces) 和平均粒径 a_c (mean radius of curvature)。

$$a_c = 2\sigma/\Delta p \quad (9)$$

式中 σ 是接触面的表面张力; Δp 是接触面两侧的压力差。表面能的增量等于水银压进孔隙所做的功

$$\sigma ds = \Delta p dV \quad (10a)$$

$$S_c = \int_0^{V(\Delta p)} \Delta p dV / \sigma \quad (10b)$$

式中 dV 是渗进孔隙内的非湿液体的体积改变量。 $S_c \sim a_c$ 的双数直线的斜率为 $2 - d_f$ 。Pachepsky 等^[14] 用水银测量了土孔隙表

面的分维, 发现土孔隙是多重分形, 即在 $4 \text{ nm} \sim 5 \mu\text{m}$ 范围内有几个不同的分维 (见图 7), 随着土粒变细, 孔隙表面的分维增大。

2.2 土孔隙通道的分维

Arya & Paris^[15] 在分析水土特征曲线时提出了土孔隙的分形模型。模型中的参数 α 即为孔隙通道的分维 D_1 , 孔隙通道的分维可以由土粒分布的分维 D 得到

$$D_1 = D - 2 \quad (11)$$

设第 i 级土粒的平均粒径为 R_i , 则这一级土粒的体积为 V_{pi} ,

$$V_{pi} = n_i 4\pi R_i^3 / 3 = w_i / \rho_p \quad (12)$$

式中 n_i 是第 i 级土粒的总数; ρ_p 是土粒的密度; w_i 是 i 级土粒的质量。

$$V_{vi} = \pi r_i^2 h_i = (w_i / \rho_p) e \quad (13)$$

式中 V_{vi} 为孔隙体积; r_i 为孔隙的平均半径; h_i 为孔隙的高度; e 为孔隙率。则

$$r_i^2 / R_i^3 = 4n_i e / (3h_i) \quad (14)$$

如果孔隙是光滑的圆柱体, 则 $h_i = 2R_i n_i$, 事实上, 孔隙是粗糙弯曲的, 设土粒分布的分维为 D , 则

$$h_i = n_i^D \cdot 2R_i \quad (15)$$

可以求出孔隙半径 r_i 为

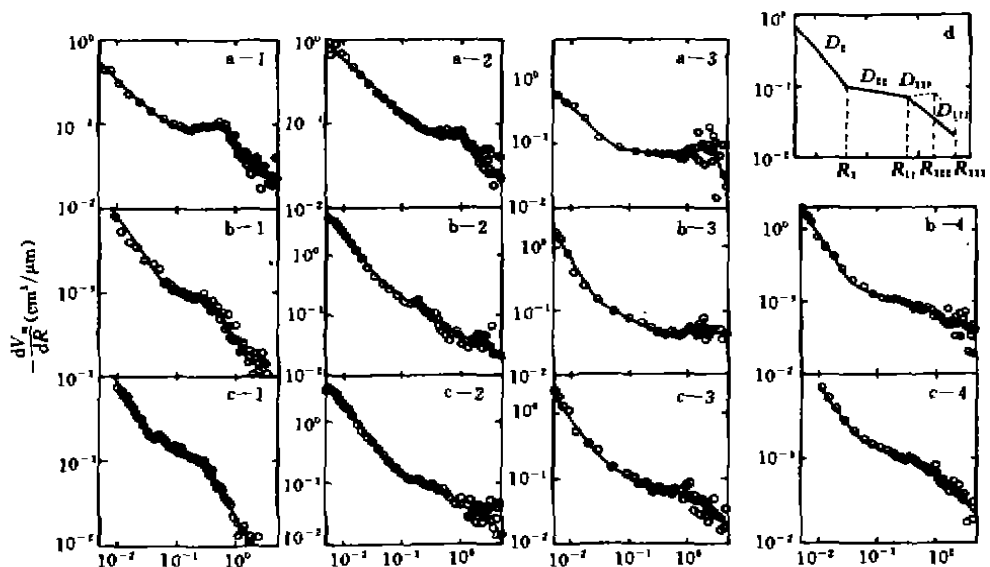


图7 土孔隙表面的多重分形

$$r_i = R_i [4e_i n^{1-D}/6]^{1/2} \quad (16a)$$

由土粒的分形分布 $R_i^D n_i = \text{常数}$, 则

$$n_i = C r_i^{-2D/(D^2-D-2)} \quad (16b)$$

式中 C 是常数, 则孔隙分布的分维 D_V 为

$$D_V = 2D/(D^2 - D - 2) \quad (17)$$

3 土的分形微结构的应用

a. 土力学中水土特征曲线是含水量与吸力间的关系曲线, 可以根据孔隙的分形特征来确定水土特征曲线。土的吸力 S_i 为

$$S_i = \frac{2\gamma \cos \beta}{\rho_w g R_i} \left(\frac{2}{3} e n_i^{1-D} \right)^{1/2} \quad (18)$$

式中 γ 是比表面能; β 是气液的接触角; ρ_w 是水的密度。与此吸力对应的含水量为

$$\theta_i = \theta_w + \frac{(\theta_w - \theta_{ri})}{[1 + (aS_i)^n]^m} \quad (19)$$

式中 θ_w 是饱和含水量; θ_{ri} , a , n , m 是参数。

b. 根据孔隙分布的上、下界限 (l_1 , l_2)^[9], 可以确定土的孔隙率 Φ

$$\Phi = A(l_2/l_1)^{3-D} \quad (20)$$

c. 土的导水率与土的结构密切相关, 土的饱和和非饱和导水率都与测量长度 L 呈指数相关^[16]。

$$K_{sat} = M^2 L^{2-\Phi_1} / R_0 \quad (21)$$

式中 K_{sat} 是饱和导水率; R_0 是水流过土粒时的阻力; M 是土聚集的分形步长; L 是晶格尺寸。

$$K_u = K_s (L/L_s)^{2-\Phi_2} \quad (22)$$

式中 K_u 是非饱和导水率; K_s 是充满空气的孔隙的导水率; Φ_1 , Φ_2 是参数; L_s 是最大的孔隙的孔径。

参考文献

1. 李生林. 中国膨胀土工程地质研究. 南京: 江苏科学技术出版社, 1992
2. Collins K, McGown A. The form and function of microfabric features in a variety of nature soils. *Geotechnique*, 1974, 24(2): 223~254
3. Ochiai M, Ozao R, Yamazaki Y. Self-similarity law of particle size distribution and energy law in size reduction of solids. *Physica A*, 1992, 191: 295~300
4. 刘松玉. 论我国特殊土粒度分布的分形结构. *岩土工程学报*, 1993, 15(1): 23~30
5. 胡瑞林. 变形条件下黄土微结构分形特征及其工程意义. 见: 第二届分形会议论文集. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1992. 348~365
6. Tyler S W, Stephen W W. Fractal scaling of soil particle-size distributions. *Soil Sci Soc Am J*, 1992, 56: 362~369
7. Avnir, Colloid J, Interface. Sci, 1985, 103(1): 112~113
8. Cohen W H, Knight B H. Fractal surface of grains. *J Soc Chem Ind*, 1974, 66: 357~366
9. Katz A J, Thompson A H. Fractal sandstone pores: implications for conductivity and pore formation. *Phys Rev Lett*, 1985, 54: 1325~1328
10. Krohn C E, Thompson A H. Fractal sandstone pores: Automated measurements using scanning-electron-microscope image. *Phys Rev B* 1986, 33: 6366~6374
11. Bale, Schmidt. Small-angle-X-ray-scattering investigation of submicroscopic porosity with fractal properties. *Phys Rev Lett*, 1984, 53(6): 596~599
12. 王域辉. 沉积岩孔隙空间的分形结构. 见: 第二届分形会议论文集. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1992. 327~336
13. Neimark A. A new approach to determination of the surface fractal dimension of porous material. *Physica A*, 1992, 199: 258~263
14. Pachepsky Ya A, Polubesova T A, Hajnos M. Fractal parameters of pore surface area as influenced by simulated soil degradation. *Soil Sci Soc Am J*, 1995, 59(3): 68~76
15. Arya & Paris. A physicaempirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data. *Soil Sci Soc Am J*, 1981, 45(2): 1023~1030
16. Crawford J W. The relationship between structure and the hydraulic conductivity of soil. *European J of Soil Sci*, 1994, 45(5): 493~502

(1995-05-02)