

非饱和土本构模型研究综述

徐永福

(河海大学土木工程学院 南京 210098)

THU: 83

摘要 综述非饱和土本构模型的研究现状。非饱和土的本构模型有非线性弹性模型、损伤力学模型、广义吸力模型和弹塑性模型。文中重点介绍弹塑性本构模型,已有的试验证实了弹塑性本构模型很好地反映了非饱和土的变形特征。但非饱和土弹性本构模型仍有许多不足之处有待改进。

关键词 非饱和土 本构模型 极限状态 屈服面 流动法则 硬化规律

非饱和土本构模型研究已有 30 年以上的历史。Coleman^[1], Blight, Fredlund^[2], Karube^[3], Alonso^[4], 杨代泉和沈珠江^[5-7], 徐永福和殷宗泽等都作了大量的工作, 本文在综述各类本构模型的同时, 重点介绍非饱和土的弹塑性本构模型, 分析其优缺点, 提出了改进的建议。

1 非线性模型

对于非饱和土, 杨代泉曾提出下列非线性本构模型^[5]

$$\{\Delta \epsilon\} = [C] \{\Delta \bar{\sigma}\} + c_d \sigma_s \{I\} + c_b \Delta S \{I\} + c_s \Delta S \{\bar{S}\} / \sigma_s \quad (1)$$

式中 $[C]$ 是弹性参数矩阵, 其中包含两个参数; c_d 为剪(胀)系数; c_b 为湿陷(胀)系数; c_s 是湿剪系数; $\{\bar{S}\}$ 为偏应力; S 是吸力 ($= u_a - u_w$); σ_s 为广义切应力, $\Delta \bar{\sigma}$ 是净应力增量; $\{I\} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T$ 。等式右边第一项是由净应力增量引起的应变, 满足广义虎克定律; 第二项是由广义切应力引起的应变; 第三项是由吸力变化引起的应变; 第四项表示增湿引起的剪切变化, 并用 Plandtl-Reuess 流动法则算出各分量, 因此这一模型并非单纯的非线性弹性模型。这个模型考虑的因素比较全面, 具有较强的适应能力。但式中的五个参数都是 $\sigma_3, \sigma_1 - \sigma_3, S$ 的函数, 测试起来比

较困难, 难以推广。

2 损伤力学模型

为了描述高孔隙比的结构性粘土和黄土的剪缩软化特性, 沈珠江^[6]提出了非饱和土的损伤力学本构模型。损伤力学模型假定原状土是线弹性体, 完全损伤以后的土即为扰动土, 扰动土可用饱和土的非线性本构模型和弹塑性本构模型来描述。土体的变形过程就是从原状土向扰动土转化的过程, 这一过程中任一时刻的应力应变关系可写为

$$\{\sigma\} = (1 - \omega)[D]_i \{\epsilon\} + \omega[D]_d \{\epsilon\} \quad (2)$$

式中 $[D]_i$ 为原状土的刚度矩阵; $[D]_d$ 为扰动土的割线刚度矩阵; ω 为损伤比, 即扰动土所占的比重, 损伤比可表示为下列经验公式

$$\omega = 1 - \exp\left[-a\epsilon_1 - \frac{b(w - w_0)}{(w_1 - w_0)}\right] \quad (3)$$

式中 w_0 和 w_1 分别为原状土和扰动土的含水量。损伤力学模型较好地反映应变软化和浸水软化。但是, 式(3)是从某种猜想出发而提出的, 是否符合实际, 仍有待验证。

3 广义吸力模型

吸力的作用在于增加土粒之间的抗滑阻

力,一切增加抗滑阻力的因素都可以算作广义吸力。广义吸力主要有折减吸力和胶结吸力两部分组成,前者实质是毛管作用的反映,又可以称为毛管吸力;后者则是结构强度的反映,可以称为结构吸力。折减吸力 S_e 和结构吸力 S_b 的丧失规律可表示为^[7]

$$S_e = S_{e0}[(w_s - w)/(w_s - w_0)]^n \quad (4)$$

$$S_b = S_{b0}[1 + \cos\pi(\frac{q - q_0}{q_{\max} - q_0})] \quad (5)$$

式中 S_{e0} 和 S_{b0} 分别表示原状土的折减吸力和结构吸力; q 是广义滑动力

$$q = (\alpha\sigma_m + b\sigma_s)/(\sigma_m + S') \quad (6)$$

式中 σ_m 和 σ_s 分别为法向应力和切应力; S' 是广义吸力

$$S' = S_e + S_b \quad (7)$$

饱和时 $w = w_0$, $S_e = 0$, q 达到最大值 $q_{\max}$ 。

广义吸力模型把应变分为两部分,一部分取决于有效应力的变化,另一部分因吸力的丧失而产生^[7],即

$$\{\Delta\epsilon\} = [C]_{EP}\{\Delta\sigma'\} + c_b(e - e_s)\Delta S'[I] + c_s\Delta S' - \{\bar{S}\}/\sigma_s \quad (8)$$

式中 $[C]_{EP}$ 为弹塑性柔度矩阵,可以利用饱和土的弹塑性模型确定; e 和 e_s 分别为实际孔隙比和饱和孔隙比。这个模型应该具有很强的适用性,且计算参数只比饱和土模型的参数增加两个。

4 弹塑性模型

4.1 Karube 模型

Karube 用三轴压缩仪研究了非饱和高岭土的性状,运用临界状态土力学(CSSM)概念建立了非饱和粘土的本构模型。含水量的变化与吸力变化之比($\Delta w/\Delta S$)同孔隙比成正比。从试验中可得到一套平行破坏线,它是吸力的函数,吸力越大,截距越大。定义横轴上截距的绝对值是 $f(S)$,破坏线的方程变为

$$q_f' = M'[p + f(S)] = M' \frac{1}{a} p \quad (9)$$

$$q_f' = q_f - p(-\Delta v/\Delta\epsilon)_f \quad (10)$$

式中 $(-\Delta v/\Delta\epsilon)_f$ 为剪胀指数, $\epsilon = 2(\epsilon_1 - \epsilon_3)/3$; $S = u_a - u_w$, $q_f = (\sigma_1 - \sigma_3)_f$; $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 - u_a$; M' 为校正破坏线的斜率, $1/a$ 是一参数,定义为

$$\frac{1}{a} = 1 + f(S)/p \quad (11)$$

通过反复试验,发现下列关系式反映了非饱和土的应力-应变关系

$$(\epsilon - \epsilon_c) = a^2 G_1(a\eta) \quad (12a)$$

$$(V - V_c) = a^2 G_2(a\eta) \quad (12b)$$

$$\Delta w = a^2 H(S) \cdot G_3(a\eta) \quad (12c)$$

式中 ϵ_c 和 V_c 为轴向压缩开始时的应变; $\eta = q/p$;

Toll^[8]通过试验发现下列关系

$$q = M_a(p - u_a) + M_w(u_a - u_w) \quad (13a)$$

$$v = \Gamma_{aw} - \lambda_a \ln(p - u_a) + \lambda_w \ln(u_a - u_w) \quad (13b)$$

式中 v 是比体积($v = 1 + e$); e 是孔隙比; $M_a, M_w, \Gamma_{aw}, \lambda_a, \lambda_w$ 是土饱和度和结构的函数。这一试验结果与 Karube 模型一致。

4.2 Alonso 模型

4.2.1 应力屈服面

在压缩试验中,非饱和土的比体积 v ($v = 1 + e$)随应力 p 的变化关系(见图 1)可以表示为

$$v = N(S) - \lambda(S) \ln(p/p^c) \quad (14)$$

式中 p 是平均净压力, $p = \sigma_m - u_a$; $\lambda(S)$ 是对于压应力 p 的压缩指数,随吸力 S 增加而减小; p^c 是参考压应力; $N(S)$ 是与吸力 S 有关的初值。在常应力条件下,非饱和土的比体积变化为

$$dv = -\lambda_s \cdot dS/(S + p_{at}) \quad (15a)$$

$$v = -\lambda_s \cdot \ln[(S + p_{at})/p_{at}] \quad (15b)$$

式中 p_{at} 为大气压力;而干湿循环段的比体积变化(相当于回弹)为

$$dv = -\kappa_s \frac{dS}{S + p_{at}} \quad (16a)$$

$$v = \kappa_s \ln(\frac{S + p_{at}}{p_{at}}) \quad (16b)$$

在图 1 中点 1 处,非饱和土的比体积满足

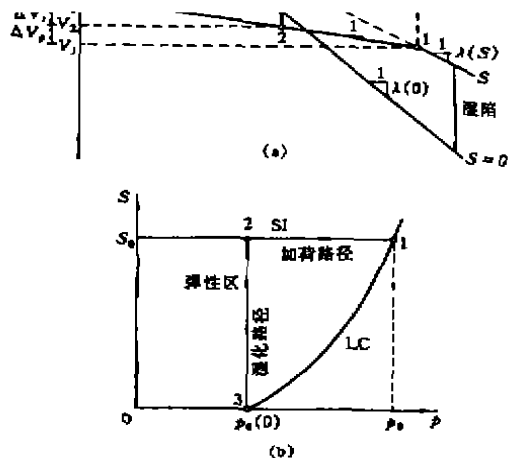


图1 $p_0(0)$ 和 p_0 的关系曲线
(a) 压缩曲线; (b) LC 屈服面

$$v_1 + \Delta v_p + \Delta v_s = v_3 \quad (17)$$

假设

$$\Delta v(p^c)|_s^0 = N(0) - N(S) = \kappa \ln \left(\frac{S + p_{at}}{p_{at}} \right)$$

则得到

$$p_0(S)/p^c = [p_0(0)/p^c]^{\lambda(0)-\kappa/\lambda(S)-\kappa} \quad (18)$$

此即为 LC(after loading-collapse) 屈服面方程, 式中 $p_0(0)$ 为饱和条件下的先期固结应力; $\lambda(0)$ 为饱和状态下对于应力的压缩指数; $\lambda(S)$ 随 S 变化的经验式为

$$\lambda(S) = \lambda(0)[(1-\gamma)\exp(-\beta S) + \gamma] \quad (19)$$

式中 $\gamma = \lambda(S \rightarrow \infty)/\lambda(0)$, 是一个常数; β 是

一个控制 $\lambda(S)$ 随吸力 S 增长的速率的参数。

非饱和土的吸力的增加同样能引起土的塑性变形。图1中 S_0 把土体的变形划分了两个区域, 当 $S < S_0$ 时, 土体处于弹性区域; 反之, 土体处于塑性区域。可见, 吸力 S_0 相当于屈服应力, 因此, 在没有实验资料之前, 可以假设屈服函数为

$$S = S_0 = \text{常数} \quad (20)$$

此式代表 SI 屈服曲线(after suction increase), 式中 S_0 是历史上土的最大吸力。

三轴应力状态下, 非饱和土的本构关系以饱和土的剑桥模型为边界条件, 即吸力固定时非饱和土的屈服面是椭圆, 饱和土的极限线的斜率 M 保持不变(图2), 椭圆屈服面的方程式为

$$f_1 = q^2 - M^2(p + p_s)(p_0 - p) = 0 \quad (21)$$

$$\text{式中 } p = \frac{\sigma_{ii}}{3} - u_a; q = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{s_{ij}s_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; p_s$$

为临界状态线与 p 轴的交点到原点的距离, 随吸力增加而增加, 类似于凝聚力随吸力 S 的变化特征, 表达式为

$$p_s = \kappa \cdot S \quad (22)$$

假定 (p, S) 平面内 SI 屈服线延伸到 (q, p, S) 空间, 即得到第二个屈服面

$$f_2 = S - S_0 = 0 \quad (23)$$

4.4.2 硬化规律

在弹性区内, 由应力 p 引起的弹性体应变可以表示为

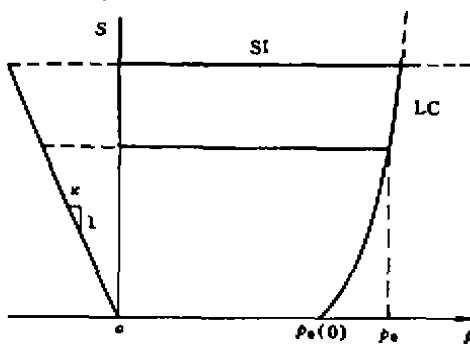
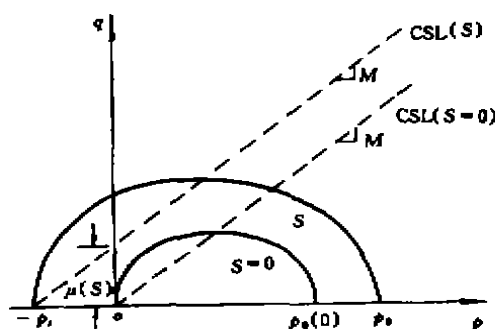


图2 非饱和土的屈服面

$$d\epsilon_{vp}^E = -\frac{dv}{v} = \frac{\kappa}{v} \cdot \frac{dp}{p} \quad (24a)$$

一旦 p 达到屈服应力 p_0 时,总的体应变可由式(14)得到

$$d\epsilon_{vp}^E = \frac{\lambda(S)}{v} \cdot \frac{dp_0}{p_0} \quad (24b)$$

因此,由应力 P 引起的塑性体应变为

$$\begin{aligned} d\epsilon_{vp}^P &= d\epsilon_{vp} - d\epsilon_{vp}^E \\ &= \frac{\lambda(S) - \kappa}{v} \cdot \frac{dp_0}{p_0} \end{aligned} \quad (24c)$$

考虑到 LC 屈服曲线(式(18)),塑性体应变可以表示为

$$d\epsilon_{vp}^P = \frac{\lambda(0) - \kappa}{v} \cdot \frac{dp_0}{p_0} \quad (24d)$$

同样,吸力增加引起的弹性体应变可由式(16a)得到

$$d\epsilon_{vs}^E = \frac{\kappa_s}{v} \cdot \frac{dS_0}{(S + p_{at})} \quad (25a)$$

在 $S = S_0$ 屈服面上的总体应变和塑性体应变分别为

$$d\epsilon_{vs} = \frac{\lambda_s}{\lambda} \cdot \frac{dS_0}{(S_0 + p_{at})} \quad (25b)$$

$$\begin{aligned} d\epsilon_{vs}^P &= d\epsilon_{vs} - d\epsilon_{vs}^E \\ &= \frac{\lambda_s - \kappa_s}{v} \cdot \frac{dS_0}{S_0 + p_{at}} \end{aligned} \quad (25c)$$

由式(24d)和式(25c)可以得到非饱和土塑性变形的硬化规律

$$\frac{dp_0(0)}{p_0(0)} = \frac{v}{\lambda(0) - \kappa} \cdot d\epsilon_{vs}^P \quad (26a)$$

$$\frac{dS_0}{S_0 + p_{at}} = \frac{v}{\lambda(S) - \kappa_s} \cdot d\epsilon_{vs}^P \quad (26b)$$

4.2.3 应变增量公式

根据相关流动法则,相应于 f_1 和 f_2 屈服面的塑性势函数分别为

$$g_1 = f_1 \quad (27)$$

$$g_2 = p \quad (28)$$

经推导得到体应变 ϵ_v 和广义切应变 ϵ_s 的增量公式分别为

$$d\epsilon_v = \frac{\kappa}{v} \cdot \frac{dp}{p} + \frac{\kappa_s}{v} \cdot \frac{dS}{S + p_{at}} + \mu_1 + \mu_2 \quad (29)$$

$$d\epsilon_s = \frac{dq}{3G_E} + \mu_1 \frac{2q\bar{\alpha}}{M_2(2p + p_s - p_0)} \quad (30)$$

式中 $v = 1 + e$, e 为孔隙比; G_E 为弹性剪切模量;

$$\mu_1 = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial p} \cdot dp + \frac{\partial f_1}{\partial q} \cdot dq + \frac{\partial f_1}{\partial S} \cdot dS}{\frac{\partial f_1}{\partial p_0(0)} \cdot \frac{\partial p_0(0)}{\partial \epsilon_v^P}} \quad (31a)$$

$$\mu_2 = -\left(\frac{\partial f_2}{\partial S} \cdot dS\right) / \left(\frac{\partial f_2}{\partial S_0} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial \epsilon_v^P}\right) \quad (31b)$$

$\bar{\alpha}$ 为修正参数,其表达式为

$$\bar{\alpha} = \frac{M(M-9)(M-3)}{9(6-M)} \cdot \frac{1}{1 - \kappa/\lambda(0)} \quad (32)$$

4.3 弹塑性模型的试验验证结果

Brackley^[9]指出非饱和粘性土的粘粒不是均匀分布的,粘粒组成一个个“封闭”的团块,团块内的孔隙充满了水,团块与团块之间的孔隙充满了空气。非饱和土的这一结构决定了其力学特性。由于吸力的存在,在剪切和压缩过程中,非饱和土的结构保持不变。

Wheeler 和 Sivakumr^[10]用三轴试验研究了非饱和土的变形特性。试验结果表明:①极限状态下,比体积 v 与平均净应力 p 的对数呈直线相关,符合式(14),极限线(CSL)的斜率 M 几乎不变(图3)^[7];②屈服状态时,应力 p 随 S 呈曲线相关,试验结果与理论曲线一致(图4)^[7];③屈服面在 (q, p) 平面上的投影可以近似地用椭圆曲线表示(图5)^[7]。

5 讨论和结论

极限状态是指剪切过程中不产生应力和应变变化的状态。实验表明^[10],在极限状态下,非饱和土的比水体积(specific water volume) $v_w (= 1 + S_r \cdot e)$ 在剪切过程继续增加(图6),只是增加速率有所降低。 v_w 的增加意味着力的增加,产生塑性体积。因此,严格意义上的极限状态是不存在的,即间塑性本构模型的理论基础不存在。

以 Alonso 为代表提出的弹塑性本构模型并不能反映非饱和土的所有变形特征,如剪缩软化特性等。因此,准确描述非饱和土变

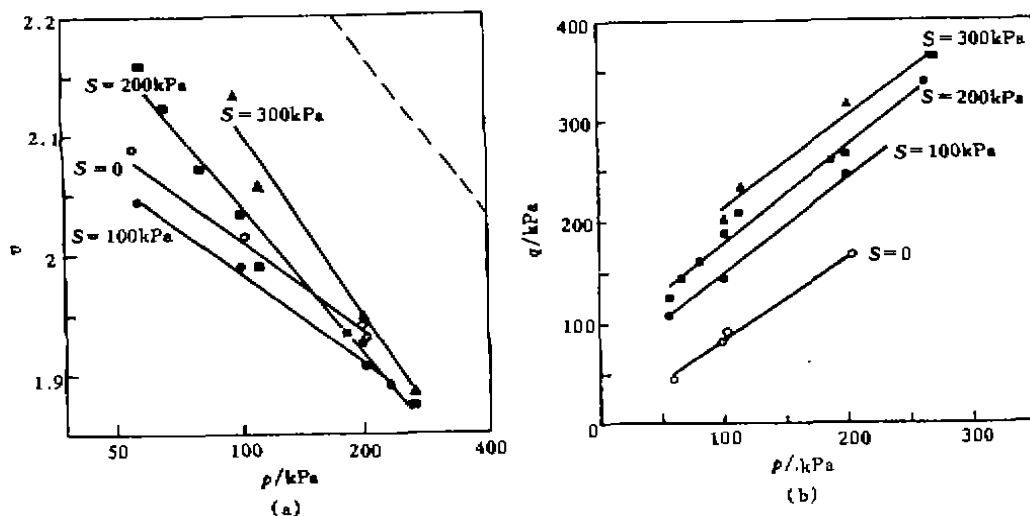


图3 非饱和土的极限状态特征
(a) $V \sim p$ 曲线; (b) CLS 线

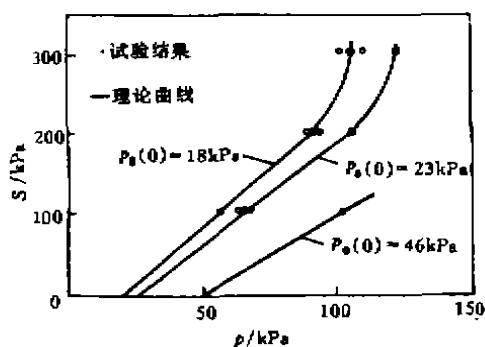


图4 LC 屈服线的试验结果

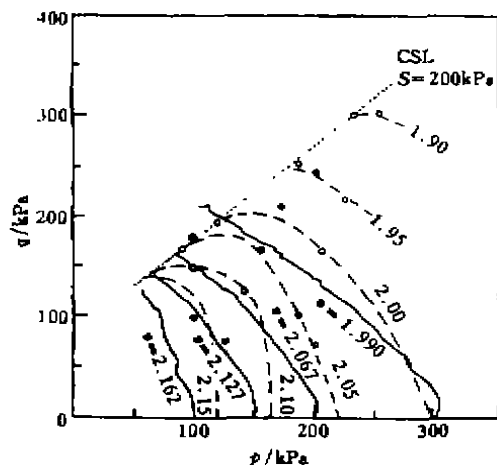


图5 椭圆屈服线的试验结果

形行为的本构模型还没有形成,还需要进一步的研究。徐永福等提出的双屈服面弹塑性本构模型克服了这些缺点,能较好地反映了

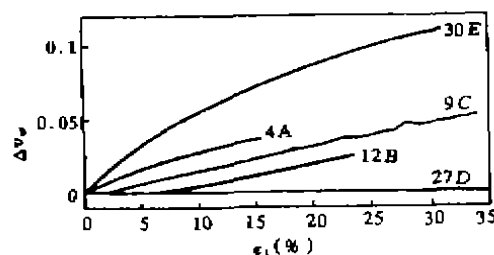


图6 Δv_s 随 ϵ_1 变化的试验结果

非饱和膨胀土的变形特征。

尽管还有许多问题有待解决,但是理论和实验结果表明,非饱和土的变形特性可以用弹塑性本构模型来近似地描述。

致谢:本文得到殷宗泽教授的关心和指导,谨此致谢。

参考文献

- 1 Coleman J D. Stress strain relations for partly saturated soils. Correspondence to Geotechnique, 1962, 12(4): 348 ~ 350
- 2 Fredlund D G, Morgenstern N R. Constitutive relations for volume change in unsaturated soils can Geotech J, 1976, 13(1): 261 ~ 276
- 3 Karube D. Yield function of unsaturated soils. 12nd IC-SMFE, 1989, 615 ~ 618
- 4 Alonso E E, Gens A, Josa A. A constitutive model for partially saturated soils Geotechnique, 1990, 40(3): 405 ~ 430
- 5 Yang D Q, Shen Z J. Generalized nonlinear constitutive

- theory of unsaturated soils. Proc of 7th int Conf on expansive soils, Dallas, 3 ~ 5 August, 1992; 153 ~ 162
- 6 沈珠江. 土体变形特征的损伤力学模拟. 5 届全国土力学数值分析与解析方法讨论会议论文集, 重庆, 1994; 1 ~ 8
 - 7 沈珠江. 广义吸力和非饱和土统一变形理论. 岩土工程学报, 1996(2)
 - 8 Toll D G. A framework for unsaturated soil behaviour,

Geotechnique, 1990, 40(1); 31 ~ 44

- 9 Brackley. Swell pressure and free swell in a compacted clay. Proc 3rd int Conf Expansive Soils, Jerusalem; Academic Press, 1975; 169 ~ 176
- 10 Wheeler S J, Sivadumar V. An elastic - plastic critical state framework for unsaturated soils. Geotechnique, 1995, 45(1); 35 ~ 53

(收稿日期: 1995 - 10 - 04)

(上接第 3 页)

该模型目前尚无图表或曲线可查, 郭相平等提供了一套设计程序, 设计者只需将土壤特性长 L 及各分段的长度 L_i 和高差 Δz_i 。 q 可以根据实际情况选定或根据前述两种模型求得。

阶式水平畦灌模型将水平畦灌水流推进特点和有坡畦灌的水流消退特点相结合, 灌水时可以采用较大的单宽流量和畦长, 在透水性较强的土壤条件下优越性比较明显。该模型在具有一定地形坡度的灌区使用, 还可以利用原有坡度减少土地平整的土方量。当畦长不变时, 采用该模型可以提高灌水均匀度。

如果在设计时令 $T_{\infty} = T_1$, 则该模型设计出的方案具有十成改口模型特点。

经大田验证, 在同样的土壤条件下, 阶式水平畦灌比一般水平畦灌 DU 值增加 5% 左右。

上述三种设计模型, 都是在零惯性量模型的基础上建立起来的, 由于建立模型时考虑的管理水平和土壤条件不同, 使模型各具特色。

Clemmens 得出的设计方案是理论最优组合; 十成改口模型着重考虑了农民的实际灌水能力, 在不过分恶化灌水质量的前提下使灌水方法简单易行, 是目前广泛采用的灌水技术; 阶式水平畦灌模型的主要目的是扩大水平畦灌的使用范围和提高灌水质量。随着机械化程度和农民灌溉管理水平的提高, Clemmens 模型和阶式水平畦灌模型将会得到广泛应用。

参考文献

- 1 Theodor, Strelkoff, Nikolaos. Border irrigation hydraulics with zero-inertia model for border irrigation. Journal of the Irrigation and Drainage Division, 1977, 103(3); 325 ~ 342

- 2 Clemmens A J, Strelkoff, Dedrick A R. Development of solution for level-basin design. Journal of the Irrigation and Drainage Division. 1981, 107(3); 265 ~ 279
- 3 Wattenburger P L, Wayne Clyma. Level-basin design and management in the absence of water control part I: Evaluation of completion-of-advance irrigation. Transaction of The ASCE, 1989, 32; 838 ~ 843
- 4 Wattenburger P L, Wayne Clyma. Level-basin design and management in the absence of water control part II: Evaluation of completion-of-advance irrigation. Transaction of The ASCE, 1989, 32; 844 ~ 850
- 5 林性粹, 郭相平. 阶式水平畦灌数学模型及其应用. 西北农业大学学报, 1995(3); 1 ~ 4

(收稿日期: 1995 - 10 - 11)

简 讯

▲据《Water Power & Dam Construction》1996 年 2 月刊报导, 美国一家电力公司—Mission Energy 公司以 10.24 亿美元购买了英国最大的 Dinorwig 抽水蓄能电站和装机容量为 360MW 的 Ffestinog 水电站。Mission Energy 公司发言人声称, 该公司还将进一步扩大其在英国市场的占有率, 很可能通过向英国购置 4000 MW 电站来实现。

▲新西兰在其南部正在兴建一座多功能水利枢纽工程, 其坝高 50 m、坝顶长 370 m、装机容量为 7.4 MW, 可灌溉 1.6 万 hm^2 农田。该工程计划以 1997 年底竣工, 耗资 2000 万美元。

▲匈牙利电力机构从今年元月起每年向奥地利提供 1200 GW·h 的电力, 以偿还奥地利提供给匈牙利兴建 Nagymoros 坝的贷款。

(熊莉芸供稿)