

板壳有限单元法的变分原理与单元类别综述

邵国建 卓家寿

(河海大学土木工程学院 南京 210098)

摘要 基于不同种类的泛函形式,对目前有限元法分析板、壳问题时所采用的各种单元进行归类,介绍非协调元、协调元、混合元、杂交元、广义协调元及拟协调元等在实施过程中的处理方法,并分析各种单元的适用场合及优缺点。

关键词 板 壳 变分原理 单元构造 有限单元法

有限元法中首要问题是场变量选取及其插值函数的构成,对于要求 C_0 连续性的插值函数的构成比较简单,而以板、壳弯曲为代表结构分析时要求场变量具有 C_1 连续性的插值函数的构成,除了一维问题(如果梁弯曲、轴对称壳)中易于实施外,比 C_0 连续问题中要复杂得多,这导致用有限元法分析板、壳问题时遇到麻烦,这也是人们长期从事这方面研究的原因。板壳单元按构造单元种类来分有非协调元^[1]、协调元^[2]、位移和转动分别插值的板单元^[3]、离散 Kirchhoff 单元^[4]、混合元^[5]、杂交元^[6]、广义协调元^[7] 及拟协调元^[8]。事实上,构造上述各种单元基于不同类型泛函,下面以薄板结构为主要分析对象,就构造不同种类单元所采用的各种泛函进行分析,其理论也可推广应用于一般板壳结构。

1 薄板非协调元及协调元

势能泛函表示为

$$\Pi_p = \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \underline{k}^T \underline{D} \underline{k} - q\omega \right) dx dy - \int_{s_1} \bar{V}_n \omega ds + \int_{s_2+s_3} \bar{M}_n \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \quad (1)$$

式中 $\underline{k} = \underline{L} \omega$ 为广义应变; $\underline{D}$ 为弹性矩阵; q 为横向分布载荷; ω 为挠度。

边界条件:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \omega|_{s_1} &= \bar{\omega}, \frac{\partial \omega}{\partial n}|_{s_1} = \bar{\theta} \quad (\text{on } s_1) \\ \textcircled{2} \omega|_{s_2} &= \bar{\omega}, \bar{M}_n|_{s_2} = \bar{M}_n \quad (\text{on } s_2) \\ \textcircled{3} \bar{M}_n|_{s_3} &= \bar{M}_n, \left(Q_n + \frac{\partial \bar{M}_n}{\partial s} \right)|_{s_3} = \bar{V}_n \quad (\text{on } s_3) \end{aligned}$$

基于式(1)泛函以 ω 作为场变量构造单元,每个单元结点有挠度(1个)、转动(2个)共3个参数,根据单元结点数及结点参数选取,可建立适用于规则边界的薄板四结点非协调矩形元,见图1。适用于任意边界的三结点非协调三角形单元,见图2。需指出采用三

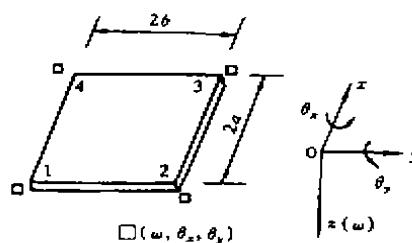


图1 四结点矩形板单元

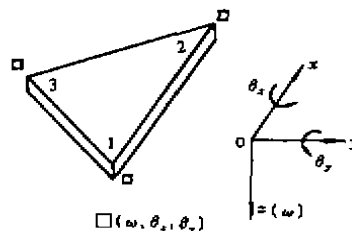


图2 三结点三角形板单元

角形板单元时宜用面积坐标。这类单元可保证单元界面 ω 和 $\partial\omega/\partial s$ 协调, 而无法保证 $\partial\omega/\partial n$ 协调, 但计算结果表明效果良好^[1]。这是因为利用最小势能原理求得的近似解一般使结构呈现过于刚硬, 而非协调元虽未精确满足最小势能原理的要求, 但在单元交界面上有较多的自由度, 使结构趋于柔软, 正好部分地抵消了上述过于刚硬带来的误差。Irons^[9] 提出了分片检验方法, 为非协调元收敛性提供了一个简便实用的检验标准。事实上, 分片检验是对非协调元的收敛性进行事后评估的方法, 文献[10] 对此有进一步的讨论。但需指出非协调元的收敛性是以分片检验为条件的, 其收敛并非单调, 不能对解的上界或下界作出估计, 因而在早期, 对板的协调元相当重视。在经典薄板理论的范围, 使板单元满足协调性要求的方法有两种:

a. 增加结点参数, 即结点参数还包含 ω 的二次导数。例如采用 21 个自由度和 18 个自由度的三角形板单元 (见图 3), 每个结点包含有 6 个参数, 即: $\omega, (\frac{\partial\omega}{\partial x})_i, (\frac{\partial\omega}{\partial y})_i, (\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2})_i, (\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2})_i, (\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y})_i, i = 1, 2, 3$ 。另外每个边界的中结点有一个参数, 即 $(\frac{\partial\omega}{\partial n})_k, k = 4, 5, 6$ 。位移函数采用 x 和 y 的完全 5 次多项式, 其中包括 21 个待定系数, 极易验证这种单元是完全满足协调要求的。为了克服由于边界中结点的出现导致增加方程组的带宽, 又出现了 18 个自由度的板单元, 它的位移函数仍是 5 次多项式, 角结点仍各有 6 个结点参数, 但各

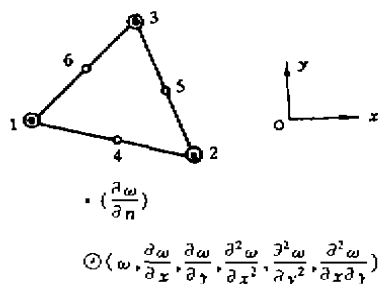


图 3 21 个自由度三角形板单元

个边界中结点的 $\partial\omega/\partial n$ 值不再作为独立的参数, 而是作为限制各个边界上 $\partial\omega/\partial n$ 的三次变化的附加条件。多结点参数的四边形单元使用较少, 尽管矩形单元可采用 Hermite 多项式作为位移函数, 但这种单元难以适应一般几何形状的结构, 而一般四边形板单元除取三角形组合的方法外, 直接建立单元的位移函数比较复杂。

b. 保证每个结点有 3 个参数的前提下采取其它一些措施。如附加校正函数法^[11,12]、再分割法^[12]等。对图 2 中三结点三角形单元之所以是非协调元, 是由于在每边上法向导数 $\partial\omega/\partial n$ 是二次变化, 只由两结点的 $\partial\omega/\partial n$ 值不足以唯一地决定它。校正函数法的基本思想是设法找到分别和各个边联系的校正函数。例如在图 2 中和 2—3 边联系的校正函数 φ_{23} , 具有如下性质: ① 在全部边界上 $\varphi_{23} = 0$; ② 在边界 1—2 和 1—3 上法向导数 $\partial\varphi_{23}/\partial n = 0$; ③ 在边界 2—3 上 $\partial\varphi_{23}/\partial n \neq 0$, 按二次变化, 并在边界中点取单位值。类似可以有校正函数 φ_{31} 和 φ_{12} , 则可按一定比例将它们叠加到原来非协调位移函数中, 有:

$$\omega = \omega_0 + \gamma_1 \varphi_{23} + \gamma_2 \varphi_{31} + \gamma_3 \varphi_{12} \quad (2)$$

式中 ω_0 为非协调位移函数; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是待定常数, 可以通过调整它们的大小, 使得 $\partial\omega/\partial n$ 在各个边界中点数值等于各个边界两端点 $\partial\omega/\partial n$ 值的平均值, 即使得 $\partial\omega/\partial n$ 在各个边界的法向导数 $\partial\omega/\partial n$ 成线性变化。因此, 两端的法向导数值就唯一确定中点的法向导数, 从而相邻单元交界面上的协调性得到实现。

再分割法基本思想^[12]: 对图 4 所示三角形单元来说, 基于一个内点把每个三角形单元分成 3 个三角形, 对于每个三角形写出包含 10 项的三次展开式, 最终展开式以节点 1, 2, 3 处 9 个一般自由度及节点 4, 5, 6 处法向斜率来表示, 从而得到具有 12 个自由度的单元。若限制外边上的法向斜率, 就得到 9 个自由度单元。

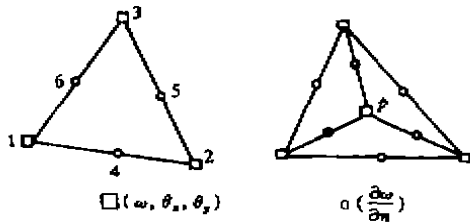


图4 协调三角形单元

2 基于修正或带约束的势能原理建立的薄板单元

若在板弯曲问题中,以位移(挠度)和转动作为独立的场变量。对式(1)进行修正得到势能泛函:

$$\bar{\Pi}_p = \Pi_p + \iint_{\Omega} \alpha_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \theta_x \right)^2 dx dy + \iint_{\Omega} \alpha_2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \theta_y \right)^2 dx dy \quad (3)$$

式中 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = Gt/2k$, G 为材料剪切模量, t 为板厚度, k 为考虑实际剪切应变沿厚度方向非均匀分布而引入的修正,按能量相当,对截面为矩形应取 $k = 6/5$ 。事实上,式(3)就是考虑剪切变形的 Mindlin 平板理论的泛函,可用于较厚平板弯曲问题,当用于薄板时,式(3)中后二项就起到罚函数的作用。这样处理是将原构造 C_1 连续性插值函数转化为构造 C_0 连续性插值函数,显然使问题简单化了。但要注意,由此建立单元用于较厚的板、壳问题效果较好,但对于薄板、薄壳必须采用降阶积分或缩减积分^[12] 等措施,以避免发生剪切“闭锁”(locking),文献[3,13,14]作了详细讨论。对三角形薄板单元,文献[11]虽然采用缩减积分,但仍发生剪切“闭锁”, ω 应采取6个结点三角形二次插值,转角采用3个结点三角形的线性插值,实践表明对于较薄、较厚板的计算效果均良好。

为了从根本上消除发生剪切“闭锁”现象,采用离散的 Kirchhoff 单元是个解决问题的办法。此种单元仍采用 ω 和转角为独立场变量,而 ω 与转角之间的约束不是用罚函数方法引入,而是在若干离散点强迫其实现。这样,构造单元所基于的泛函恢复为薄板理论的泛函表达式(1),文献[15]介绍了三结点

三角形离散 Kirchhoff 单元(DKT 单元),对于图5所示单元,具体要求为:

在角结点

$$C = \left\{ \begin{matrix} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_i - \theta_{xi} \\ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_i - \theta_{yi} \end{matrix} \right\} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

在各边中结点

$$\left\{ \begin{matrix} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} \right)_k - \theta_{sk} = 0 \\ \theta_{nk} = \frac{1}{2}(\theta_{ni} + \theta_{nj}) \end{matrix} \right. \quad (k = 4, 5, 6) \quad (5)$$

式中 s, n 分别表示各边的切向和法向。此种 DKT 单元由于引入约束条件式(5),消去了各边中结点的参数 $\theta_{sk}, \theta_{nk} (k = 4, 5, 6)$,所以仍是三结点三角形单元。在各边界上 ω 为三次变化, θ_s 为二次变化,而 θ_n 为线性变化,它们完全由角结点上参数确定,使相邻单元之间协调,保证了结果的收敛性,效果较好。文献[20]采用带剪切约束的四边形板单元,其理论与此 DKT 单元完全一致。

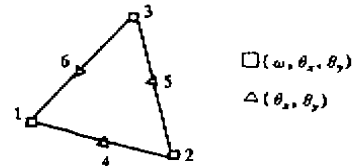


图5 DKT 单元

3 薄板的混合单元及杂交元

以位移 ω 和内力 M 作为独立的两类自变函数的薄板两变量广义变分原理,称为 Hellinger-Reissner 变分原理^[16],它是最小势能原理或最小余能原理的推广。以薄板弯曲为例,文献[17]给出 Reissner 泛函表达式为

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \iint_{\Omega} [-B(M_{\alpha\beta}) - M_{\alpha\beta}\omega_{,\alpha\beta} - q\omega] dA - \\ & \int_{s_2+s_3} (\bar{M}_{nn}\omega_{,n} + \bar{M}_{ns}\omega_{,s} - \bar{Q}_n\omega) ds + \\ & \int_{s_1} [M_{nn}(\omega_{,n} - \bar{\omega}_{,n}) + M_{ns}(\omega_{,s} - \bar{\omega}_{,s} - \bar{\omega}_{,s}) - Q_n(\omega - \bar{\omega})] ds \quad (6) \end{aligned}$$

将式(6)改写成适用于有限元各种形式的连接结合情况,则有:

$$\begin{aligned} \Pi_R = \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \iint_{\Omega^e} \left[\left(-\frac{1}{2} M_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1} M_{\gamma\delta} \right) - \right. \right. \\ \left. M_{\alpha\beta} \omega_{,\alpha\beta} - q\omega \right] dA + \int_{i_2+i_3} (\bar{M}_{nn} \omega_{,n} + \\ \bar{M}_{ns} \omega_{,s} - \bar{Q}_n \omega) ds + \int_{i_1} [M_{nn} (\omega_{,n} - \\ \bar{\omega}_{,n}) + M_{ns} (\omega_{,s} - \bar{\omega}_{,s}) - Q_n (\omega - \\ \bar{\omega})] ds \} \quad (7) \end{aligned}$$

用 Reissner 变分原理构造板单元, 其内力和位移都同时在每个单元内假定, 故此构造单元是一种混合单元。当单元边界使 ω 和 M_{nn} 连续时, 运用分步积分可得到 Hermann 泛函:

$$\begin{aligned} \Pi_R = \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \iint_{\Omega^e} \left[-\frac{1}{2} M_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1} M_{\gamma\delta} + \omega_{,\alpha} M_{\alpha\beta,\beta} - \right. \right. \\ \left. q\omega \right] dA - \int_{i_1} M_{ns} \omega_{,s} ds - \int_{i_1} [M_{nn} \bar{\omega}_{,n} + \\ M_{ns} \bar{\omega}_{,s} + Q_n (\omega - \bar{\omega})] ds + \int_{i_2+i_3} [(\bar{M}_{nn} - \\ M_{nn}) \omega_{,n} + (\bar{M}_{ns} - M_{ns}) \omega_{,s} - \bar{Q}_n \omega] ds \} \quad (8) \end{aligned}$$

Hermann 泛函仅要求 ω 和 M_{nn} 连续构造插值函数, 较为方便, Hermann 在文献[5]中给出三角形单元, 假定 ω 为线性, M_{nn} 为常量 (见图6)。文献[18]给出三角形单元中 ω 为二次变化和 M_{nn} 为线性变化 (见图7)。对于图6所示常弯矩三角形混合元, 单元自由度为三角形三角点挠度 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 和 M_4, M_5, M_6 。对于图7所示线性弯矩三角形单元, 由于法向弯矩 M_7, M_8, M_9 与相邻单元的未知量无关, 可以在单元分析阶段通过高斯消去法把它们消去, 这样, 单元自由度可以由15个减至12个。文献[19]假设 ω 线性, M_{nn} 为常量矩形混合单元。从计算结果来看, 效果均较好。但需指

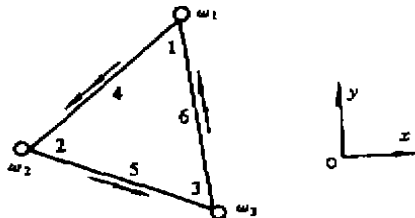


图6 常弯矩三角形混合单元

出, 在使用混合单元时, 由于建立的刚度矩阵主对角线元素上存在零元素, 不能用一般的矩阵求逆法求解, 故在使用上受到一定限制。

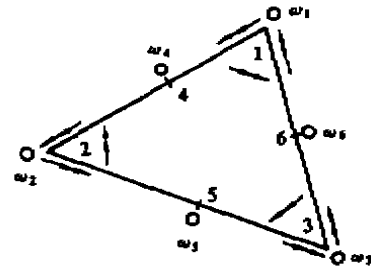


图7 线性弯矩三角形混合单元

基于 Hermann 泛函构造单元是 ω 和 M_{nn} 同时出现在单元及交界上, 为了避免刚度矩阵出现零元素, 可基于修正的 Hellinger-Reissner 混合变分原理构造出所谓杂交单元。相应修正泛函为

$$\begin{aligned} \Pi_{mc} = \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{\Omega^e} \frac{1}{2} \underline{M}^T \underline{D}^{-1} \underline{M} d\Omega - \\ \int_{i_1} (Q_n \omega - M_n \frac{\partial \omega}{\partial n}) ds + \\ \int_{i_2+i_3} (\bar{Q}_n \omega - \bar{M}_n - \frac{\partial \omega}{\partial n}) ds \quad (9) \end{aligned}$$

式中独立场变量是单元内的内力及单元交界上的挠度和转角^[6]。但需指出, 构造出的杂交单元要求选择满足平衡的内力场, 这就使分析过程中计算应变能时, 单元相对坐标系的方向和位置具有一定的敏感反应 (即存在是否满足单元的几何不变性问题), 这也将影响杂交元的精度, 尽管引进等参数坐标系, 可保证单元满足几何不变性要求, 但等参数坐标表示的应力一般难于满足平衡关系, 故建立杂交混合元列式时必须选用混合变分原理作为理论基础^[17]。

4 基于分区势能原理的广义协调元

广义协调元^[7]是一种保证收敛的非协调元, 在粗网格中广义协调元属于非协调元, 在网格无限细化下逼近于协调元, 故也称为极限协调元。其单元构造基于薄板的分区势能原理的泛函:

$$\Pi_{mp} = \sum_p (\Pi_p^* + H_p^*) \quad (10)$$

式中 Π_p^e 为单元势能; H_p^e 为单元周边的不协调位移引起的附加能量。

$$H_p^e = \oint_{\partial A_e} [M_n^e (\frac{\partial \omega}{\partial n} - \bar{\theta}_n) + M_s^e (\frac{\partial \omega}{\partial s} - \bar{\theta}_s) - Q_n^e (\omega - \bar{\omega})] ds \quad (11)$$

广义协调元是以含有位移和边界力的多变量泛函 Π_{mp} 为理论基础, 而以单变量位移泛函 Π_p 作为实施阶段的归宿, 把广义协调条件表示为

$$H_p^e = 0 \quad (12)$$

并且将式(12)中单元周边力 M_n , M_s 和 Q_n 作为权函数来选择, 得到具有不同含义的点协调、边协调及周协调的加权残余方程, 从而构造出多种广义协调元, 在非协调元与协调元之间开辟了一条新路子。

5 基于 Hu-Washizu 变分原理的拟协调元

拟协调元^[21]是从给定应变近似函数形式出发, 通过积分用节点位移参数表示的一种离散方法。但在构造应变近似函数时要满足所谓拟协调条件, 即积分意义下的协调条件。拟协调元构造是基于 Hu-Washizu 变分原理, 即

$$\Pi_{HW}^{(e)} = \iint_{\Omega} [\frac{1}{2} \epsilon^T D \epsilon - \delta^T (\epsilon - L u)] d\Omega - \int_{\Gamma} T^T (u - \bar{u}) ds \quad (13)$$

式中 L 为微分算子矩阵; $T = R \sigma$ 为边界力矢量。

利用分步积分改写式(13)为

$$\Pi_{HW}^{(e)} = \iint_{\Omega} [\epsilon^T \sigma - \frac{1}{2} \epsilon^T D \epsilon + (L^T \sigma)^T u] d\Omega - \int_{\Gamma} T^T \bar{u} ds \quad (14)$$

由此可独立构造出:

$$\begin{cases} u = F q \\ \bar{u} = p q \\ \epsilon = \Phi_e \alpha \\ \sigma = \Phi_\sigma \beta \end{cases}$$

其中, q 为结点位移向量; F 为单元内部插值函数; p 为单元边界上一维插值函数; Φ_e 为应变插值矩阵; α 为应变参数向量; Φ_σ 为应力插值矩阵; β 为应力参数向量。一般取 $\Phi_e = \Phi_\sigma$ 。式(14)对 α, β, q 取变分, 可得到由 q 表示的 α, β 及最后关于 q 的有限元列式。

对于板问题, 文献[8]给出了六参数三角形常应变单元、九参数三角形线性应变、十二参数三角形二次应变及十二参数矩形线性应变单元的例子, 分别见图 8 中(a), (b), (c)和(d)。

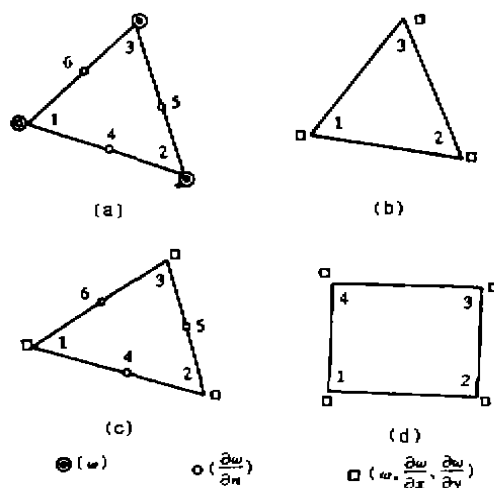


图 8 各种拟协调元

需要指出的是构造应力, 应变插值函数不应出现“闭锁”现象及协调多余零能模式。若构造得当, 拟协调元能通过分片检验, 并且位移结果较好, 而应力结果稍差一些。

6 结 语

本文介绍的基于不同泛函构造出的各种单元, 在板、壳领域被采用, 并得到了有效的检验。从目前板、壳问题数值方法发展来看, 杂交元、位移和转动分别插值的板单元、离散 Kirchhoff 理论单元其理论和应用相对较完善, 而广义协调元、拟协调元的理论与应用也取得了很大发展。本文尽管以薄板问题为主, 但不难推广应用于一般板、壳结构中去。各种单元都有其不同场合中的自身优劣, 而工程上希望能构造出既简单实用, 又保证足够精度要求、结果稳定、适用性强的单元。

这有待于力学工作者去开发和完善。

参考文献

- 1 Melosh R J. Basis for derivation of matrices for the direct stiffness. J AIAA, 1963, 1(7): 1631 ~ 1637
- 2 Fraeizs de Veubeke B. A conforming finite element for plate bending. Int J Solids Struct, 1968, 4: 95 ~ 108
- 3 Pugh E D L, Hinton E, Zienkiewicz O C. A study of quadrilateral plate bending elements with 'reduced' integration. Int J Num Meth Engng, 1978, 12: 1059 ~ 1079
- 4 Stricklin J A, Haisler W E, Tisdale P R et al. A rapidly converging triangular plate bending element. J AIAA, 1969, 7: 180 ~ 181
- 5 Hermann L R. Finite element bending analysis of plates. Div Proc ASCE, 1967
- 6 Allwood R J, Cornes G M M. Apolygonal finite element for plate bending problems using the assumed stress approach. Int J Num Meth Engng, 1969, 1: 135 ~ 149
- 7 龙驭球. 广义协调元理论与模式. 见: 黄克智, 徐秉业主编. 固体力学及其工程应用. 北京: 清华大学出版社, 1993: 142 ~ 152
- 8 Tang L M, Chen W G, Lin Y Z. Strng net function approximation and quasi-conforming technique. In: Atluri S N, Gallagher R H eds. Mixed Finite Element Methods, 1983: 173 ~ 188
- 9 Irons B M, Razzaque A. Experience with the patch test. In: Aziz A R ed. Mathematical Foundations of the Finite Element Method. Academic Press, 1972: 557 ~ 587
- 10 Taylor R L, Sino J C, Zienkiewicz O C et al. The Patch test—a condition for assessing FEM convergence. Int J Num Meth Engng, 1986, 22: 39 ~ 62
- 11 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理与数值方法. 北京: 清华大学出版社, 1988
- 12 监凯维奇·O C. 有限元法 上册. 北京: 科学出版社, 1985
- 13 Thomas J R H, Taylor R L, Worsak K N. A simple and efficient finite element for plate bending. Int J Num Engng, 1977, 11: 1529 ~ 1543
- 14 Worsak K N. A simple and efficient finite element for general shell analysis. Int J Num Meth Engng, 1979, 14: 179 ~ 200
- 15 Batoz J L, Bathe K J, Ho L W. A study of three triangular plate bending elements. Int J Num Meth Engng, 1980, 15: 1771 ~ 1812
- 16 Reissner E. On a variational theorem in elasticity. J Math Phys, 1950, 29: 90 ~ 95
- 17 卓家寿. 弹塑性力学中的广义变分原理. 北京: 水利出版社, 1989
- 18 Visser W. A refined mixed-type plate bending element. J AIAA, 1969, 7(9): 1801 ~ 1803
- 19 Bron J, Dhatt G. Mixed quadrilateral elements for bending. J AIAA, 1972, 10: 1359 ~ 1361
- 20 Crisfield M A. The application of shear-constraint to the generation of plate elements. In: Hughes T J R, Hinton E eds. Finite Element Methods for Plate and Shell Structures. Swansea: Pineridge Press Limited, 1986: 153 ~ 174
- 21 Cheung Y K, Chen W G. Generalized hybrid degenerated elements for plate and shells. Comput Struct, 1990, 36: 279 ~ 290 (收稿日期: 1995-11-16)

简 讯

▲第3届水电工程财经国际会议将于1996年11月25~26日在伦敦召开。会议将对水电工程投资的各个阶段进行评估和分析,从可行性研究到施工贷款设备购买的各种方案,从小工程到大规模工程,以及整个工程的投资等都将进行考察研究。大会主要议题为:实例分析研究、风险分析、环境影响和地区性热点问题。

▲欧洲小水电学会将于1997年9月7日至10月1日在爱尔兰都柏林举办第5届小水电国际会议暨展示会。大会将讨论小水电的经济和政策、有关工程和技术问题、环境影响、世界市场、欧洲计划和国际合作以及投资问题等。

▲据挪威国际电台报导,挪威电力供应面临危机。由于1996年春天供发电用的山间融雪稀少,致使挪威水库将近干枯,3~4月间水电站发电量减少,挪威不得不从丹麦进口电力。挪威能源部表示,他们正在研究建造两座燃气电站以缓解水电站的压力。而根据两年前的一个合同,挪威每年还得向瑞典出售电力。

(熊莉芸供稿)