

建立三维地形模型的方法研究

——利用梯度的离散点插值

王仁坤 闫红菱

(上海勘测设计研究院 上海 200434)

摘要 着重于离散点插值方法的研究,通过多面函数法和最小二乘法来阐明地形高程插值中如何利用梯度来改进插值方法,提高插值精度;并对地形软件开发中的若干问题提出了一些看法。

关键词 地形 梯度 网络 离散点 等高线 多面函数法 最小二乘法

1 插值域和测量信息

一个地域内的地形信息是通过有限个点来描述的,而在计算机处理中地形模型是利用三维网格来进行描述的。航空测量取得的网络点可以直接生成三维网格图形,而人工测量得到的测点需要进行插值计算建立规则的网格点才能生成三维网格图形。此外在加密局部网格、生成等高线图、描述地质构造、绘制剖面图和开挖图等处理过程中,经常需要重复做插值计算。因此一个地形软件最基本的功能模块是计算地域内任意一点的高程。

欲计算任意一点处的高程值,一般是先在计算点附近的一个范围内收集测点信息,这个范围称之为插值域。在具体的处理中可以通过不同的策略建立插值域;通常是以计算点为中心,取一个圆周或矩形作为插值域;也可以从计算点出发沿着各象限或各方位分头伸展,形成一个不定形状的插值域。事实上,插值域的大小和形状在整个处理过程中不应该统一规定,它完全取决于如何去收集计算点周围的测点,以保证插值计算的精度。显然过多收集远离计算点的测点是毫无用处的,只能加重处理的负担,反而降低了处理的速度。

设插值域中搜集到 n 个测点,其中第 i

个测点 $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 在平面上的坐标为 X_i 和 Y_i , 高程为 h_i , 可记为 $P_i(X_i, Y_i, h_i)$ 。每一个测点的信息至少应该包含上述三个数据,否则是无意义测点。测点的信息数据除了 X, Y, h 三个基本数据外还可能包含更多的信息,如人工测量一条测线,当掌握了沿线的高程变化规律时,只要布置少量的测点来控制,绘制地形时可经根据高程变化规律重新加密;又如可以用两条测线来控制一个区间的地形。还有一些顺山脊、山梁、山谷布置的测线包含了地形的梯度方向,控制了地形等高线的形状。在地形软件开发中应该充分发掘可利用的信息,设置对测线、区间按测量规律加密测点的功能,并在测点信息中应该考虑加入梯度数据。

2 多面函数法

多面函数法是一种数值向量化的方法(DVM),它首先建立所谓核函数,即在平面上建立任意两点 S 和 R 之间的一个函数 Q_{sr} ,核函数的值通常只与两点的坐标值有关, $Q_{sr} = f(X_s, Y_s, X_r, Y_r)$;某一点 S 可与其自身建立一个核函数 $Q_{ss} = f(X_s, Y_s, X_s, Y_s)$,并保证能够计算出一个数值;核函数一般只与两点的水平距离 $d_{sr} = \sqrt{(X_r - X_s)^2 + (Y_r - Y_s)^2}$ 有关,因此有 $Q_{sr} = Q_{rs}$ 。核函数的具体形式

可以根据上述要求结合应用需要拟定,如

$$Q_r = \sqrt{0.8 + d_r^2}, Q_r = 1 + d_r^3, \dots$$

对于任意一点 $S(X_i, Y_i)$, 可以分别对其插值域中的 n 个测点建立核函数行阵: $Q_i = [Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{in}]$, 并存在一个包含 n 个数值元素的 $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ 列向量, 使 S 点的高程值

$$h_s = Q_i \cdot A \quad (1)$$

为了求出向量 A , 可以将式(1)用于插值域中各已知高程的测点建立方程组

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

或记为

$$Q \cdot A = H \quad (3)$$

式中 Q 为“类协方差”方阵; H 为已知测点的高程列阵。从中可以解出 A , 并通过式(1)计算出 h_s 。

在绘制、跟踪等高线的过程中希望能求出等高线的引伸方向, 为此可以从式(1)求出梯度

$$\text{grad } h_s = \frac{\partial h_s}{\partial X} i + \frac{\partial h_s}{\partial Y} j \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h_s}{\partial X} = \frac{\partial Q_i}{\partial X} A \\ \frac{\partial h_s}{\partial Y} = \frac{\partial Q_i}{\partial Y} A \end{cases} \quad (5)$$

梯度方向转 90° 即是等高线引伸方向。

核函数的形式一般比较简单, 直接可以求取导函数。导函数与核函数存在一些相同的因子, 两者可以同时计算, 很少影响到处理的速度。因此在程序中值得利用梯度值来帮助生成等高线。

如同其它一些插值方法一样, 多面函数法在其插值域上只局限于提取测点的坐标和高程信息, 虽然它对测点的分布规则无特殊要求, 但考虑测点的距离远近, 不关心每一个测点所在的方位和梯度。因此在比较复杂的地形位置上必须补充较多的测点。

随着地形坡度的变化, 核函数的形式应该作一些调整, 为了方便, 可考虑带参数的核函数

$$Q_r = (\lambda + d_r^\alpha)^\beta \quad (6)$$

其中 λ, α 和 β 三个参数将改变函数曲面形状, 在程序中便于根据地形坡度改变而随时调整。

3 利用梯度插值的最小二乘法

在测量中因某些测点被布置在特殊位置而获知其梯度值, 这些测点的信息除了 X, Y, h 之外, 还有 $g_x = \frac{\partial h}{\partial X}, g_y = \frac{\partial h}{\partial Y}$ 。为了能够便于统一处理, 首先将所有测点信息都表示成 $P(X, Y, h, g_x, g_y)$ 的形式, 为此应该将无梯度信息的测点设法添加梯度。进而在统一信息基础上推求任意一点高程计算公式。

对于某一个测点 $P(X, Y, h)$ 在其插值域内获取其余 n 个测点: $P(X_i, Y_i, h_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。设 P 点的梯度分量为 g_x, g_y , 利用切平面插值可建立

$$\Delta X_i g_x + \Delta Y_i g_y = \Delta h_i \quad (7)$$

其中, $\Delta X_i = X_i - X, \Delta Y_i = Y_i - Y, \Delta h_i = h_i - h, i = 1, 2, \dots, n$ 。

对于不同测点 P_i , 式(7)中的 g_x 和 g_y 一般不会相同, 除非所有测点都在同一个平面上, 为此利用最小二乘法求下式的极小值。

$$L = \sum_{i=1}^n \lambda_i [\Delta X_i g_x + \Delta Y_i g_y - \Delta h_i]^2 \quad (8)$$

其中, λ_i 为 P 与 P_i 之间和一个与距离有关的权数。令

$$\begin{cases} \partial L / \partial g_x = 0 \\ \partial L / \partial g_y = 0 \end{cases} \quad (9)$$

从中可以解出 g_x 和 g_y 。

由式(7)建立测点之间的关系是十分粗糙的, 通常不可能推算出一个较满意的梯度值。式(9)中解得的梯度只能用来初定 P 点的梯度方向。令

$$G = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = g_x/G \\ \sin\theta = g_y/G \end{cases} \quad (10)$$

其中, θ 是 P 点的初拟梯度方向角。有了方向角可以重新利用式(8)进一步计算 G 值。

$$M = \sum_{i=1}^n \zeta_i [\Delta X_i g_x + \Delta Y_i g_y - \Delta h_i]^2 \quad (11)$$

利用式(10)可将式(11)改为 $M = M(G)$ 的形式, 并根据

$$\partial M / \partial G = 0 \quad (12)$$

可以解出 G 值, 很容易计算出梯度分量 g_x 和 g_y 。

对于任意一点 $P(X, Y, h, g_x, g_y)$ 的高程和梯度的推算, 同样可用最小二乘法, 设在其插值域内收集到 n 个测点, 每一个测点有 $P_i(X_i, Y_i, h_i, g_{xi}, g_{yi})$, 可建立下式

$$N = \sum_{i=1}^n \eta_i [\Delta X_i g_{xi} + \Delta Y_i g_{yi} - \Delta h_i]^2 \quad (13)$$

其中, $g_{xi} = \frac{g_{xi} + g}{2}$, $g_{yi} = \frac{g_{yi} + g}{2}$, η_i 是一个权数。并可通过联立方程

$$\begin{cases} \partial N / \partial h = 0 \\ \partial N / \partial g_x = 0 \\ \partial N / \partial g_y = 0 \end{cases} \quad (14)$$

解出任意一点 P 的梯度和高程。

值得注意的问题是各处理过程中所涉及的最小二乘法公式中权数的拟定。经较多的试验表明, 各处理过程中的有关权数的拟定应该是程序成败的关键。

考虑梯度的最小二乘法不仅利用了测点的高程, 而且收集了测点的梯度, 因此从收集信息的角度来说是比较全面的。由于对所有

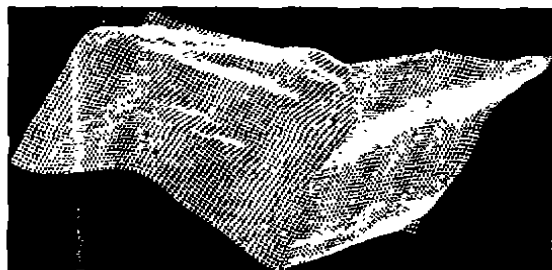


图1 三维地形模型

测点补足了梯度值, 在建立网格点时, 结点的高程值过渡较平滑, 生成的等高线效果较好, 可以同人工绘制的相比。图1和图2是用此法编制的一份试验程序绘制的某一地域的三维地形模型和等高线, 原始数据中并无测点的梯度信息, 全部由程序补充梯度, 但在山脊、凹谷部位仍取得较好的效果。

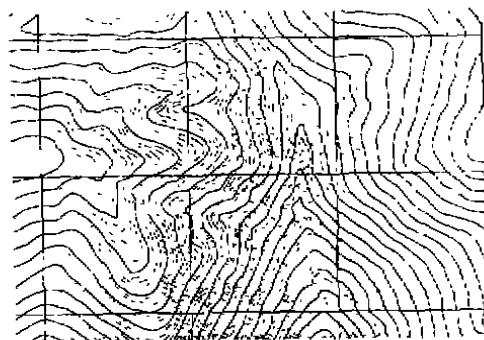


图2 等高线

梯度插值的最小二乘法以其收集信息的全面性和处理过程中的灵活性, 显示出对于复杂地形的适应性; 虽然编程复杂, 处理的数据量较大, 但仍然不失为地形软件开发中值得采用的离散点插值方法。

(收稿日期: 1996-01-25)

·简讯·

世界银行向巴基斯坦电力工程提供贷款

世界银行近日批准向巴基斯坦提供 3.5 亿美元的贷款以资助即将在该国首都伊斯兰堡以西 100km 处筹建的总投资约为 20.25 亿美元的 Ghazi-Barotha 水电工程, 占总投资成本的 15.6%。这项由银行资助的工程包括技术援助与培训, 以加强即将担负电站筹建的水电开发局(WAPDA)的管理、操作和投资效益, 更好地实施与工程相关的环境与移民计划。建设该电站对于降低该国缺电乡区用电高费用以及增加电力非常必要, 年增加发电量 2000 MW, 可以彻底消除电负荷, 与日益增长的一年 1000 MW 的电力需求保持同步。电站建设包括 Ghazi 村附近的数项工程; 一条 52 km 长的电力线路; Barotha 村附近的电力综合设施; 输送设施以及环境管理和移民计划。

(元国江 供稿)