

泄洪风险计算中 JC 法与 MC 法的比较

陈凤兰

王长新

(河海大学 南京 210098)

(新疆农业大学 乌鲁木齐 830052)

摘要 通过对 P-Ⅲ型分布概率密度函数特点的分析,对泄洪风险计算的 JC 法和 MC 法进行对比,两方法的计算结果接近,但 JC 法的计算效率远高于 MC 法。用 JC 法计算泄洪的风险是可行的。

关键词 泄洪 风险分析 JC 法 MC 法 蒙特卡罗方法

防洪泄洪系统的风险,是指洪峰流量超过该系统泄洪能力的概率。近年来,综合考虑水文和水力不确定性的风险分析方法有了较大发展^[1,2]。目前风险分析中常用的数值计算方法有 JC 法和蒙特卡罗法(MC 法)^[3],MC 法为随机抽样技巧法,可用于各种问题,尤其可用于高度非线性或复杂相关的系统,但此法计算结果依赖于样本容量和模拟次数,当风险值很小时,抽样次数将大得令人难以接受;JC 法是在改进的一次二阶矩法基础上,将随机变量非正态分布化为当量正态分布的方法。本文通过对 P-Ⅲ型概率密度函数特点的分析,对比 JC 法和 MC 法的计算结果,以便对 JC 法在水力风险分析中的使用作出评价。

1 P-Ⅲ型分布函数的特点

P-Ⅲ型分布的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (x-b)^{\alpha-1} e^{-\beta(x-b)} \quad (b \leq x < \infty) \quad (1)$$

式中 α, β 均大于 0, α, β, b 可以用基本参数 EX, c_v, c_s 表示为: $b = EX(1 - 2c_v/c_s)$, $\alpha = 4/c_s^2, \beta = 2/(EX \cdot c_v \cdot c_s)$, 其中 EX 为 x 的均值; c_v 为随机变量的变差系数,反映了随机变量的相对离散程度; c_s 为随机变量的偏态系数,反映了随机变量分布的不对称性。

P-Ⅲ型的分布参数,特别是 c_s 或 α 决定着密度函数曲线的形状。随着 c_s 的变化, P-Ⅲ型概率密度曲线可以分为四种形式。

a. 当 $0 < \alpha < 1$, 即 $\infty > c_s > 2$ 时, 密度曲线呈乙型, 以 x 轴和 $x=b$ 直线为渐近线。

b. 当 $\alpha = 1, c_s = 2$ 时, 密度曲线退化为指数曲线, 仍然呈乙型, 但左端截止在曲线起点, 该处密度有限, 右端仍延伸到无限。

c. 当 $1 < \alpha < 2$, 即 $\sqrt{2} < c_s < 2$ 时, 密度曲线呈铃型, 左端截止在曲线的起点, 在该处与直线 $x=b$ 相切, 右端无限。

d. 当 $\alpha > 2$, 即 $c_s < \sqrt{2}$ 时, 密度曲线仍呈铃型, 起点处曲线与 x 轴相切, 右端无限。

当 $c_s \geq 2$ 时, P-Ⅲ型概率密度曲线与正态分布的概率密度曲线在形状上, 相差很大。当 $c_s < 2$ 时, c_s 愈小, 密度曲线的形状愈接近于正态分布。为全面比较 JC 法和 MC 法, P-Ⅲ型分布的参数应覆盖上述四种情形, 且应使 MC 法的抽样分布与总体分布相吻合。

2 随机变量的抽样

从理论上讲, 只要有了任何一种连续分布的随机数, 就可以通过多种方法, 产生其它任意分布的随机数, 由于 $[0, 1]$ 区间上的均匀分布是最简单, 最基本的连续分布, 所以通常都使用 $[0, 1]$ 区间上均匀分布的随机数。记

国家自然科学基金资助项目(编号:59079404);国家“八五”重点科技攻关资助项目(编号:85-208-02-06-04)

[0,1]区间上均匀分布的随机数为 u 或 u_i 。

2.1 均匀分布随机数的生成

均匀分布随机数生成的方法较多,常用的是线性同余法。用线性同余法产生[0,1]区间上均匀分布的随机数的迭代公式为

$$x_{n+1} = \lambda x_n + c \pmod{M} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

式中 x_0 为初值; λ 为乘子; c 为增量; M 为模。这些都是非负整数。 λ, c, M 的选择和所使用的计算机有关。本文的计算在 386 微机上进行,外部数据总线的字长为 16 位,所以根据文献[4]的建议,分别选用: $\lambda = 2053, c = 13849, M = 65536$ 。用此参数进行抽样,并对抽样结果进行了均匀性检验,检验的结果接受均匀分布的假设。

2.2 随机变量的抽样

利用 MC 法求解可靠度,关键是对已知分布特性的随机变量进行抽样。抽样的方法很多,常用的是变换方法和舍选方法。下面分别介绍本文所用两种分布的抽样方法。

2.2.1 P-III 型分布随机变量抽样

P-III 型是水文统计中使用的主要分布之一,对 P-III 型分布采用文献[5]中的舍选抽样法,该方法基于 Whittaker 提出的 Gamma 分布的舍选抽样方法。Gamma 分布的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x} \quad (0 < p < 1) \quad (3)$$

设所研究的随机变量 z' 服从 P-III 型分布,即

$$f_1(z') = \frac{\lambda^{p'}}{\Gamma(p')} (z' - \alpha)^{p'-1} e^{-\lambda(z' - \alpha)}$$

假定 p' 满足 $p' = n + p$, 其中 n 为整数, $0 < p < 1$ 。令 $z = \lambda(z' - \alpha)$ 或 $z' = Z/\lambda + \alpha$, 则 Z 的分布为

$$f_2(z) = \frac{1}{\Gamma(p')} z^{p'-1} e^{-z}$$

由 Γ 分布对加法的封闭性,设 x 的分布为

$$f_3(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x}$$

y 的分布为

$$f_4(y) = \frac{1}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-y}$$

则 $z = x + y$ 的分布为

$$f_5(z) = \frac{1}{\Gamma(p+n)} z^{p+n-1} e^{-z}$$

可以证明^[5], 当 y 概率密度函数为

$$\frac{1}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-y}$$

$$y = - \sum_{i=1}^n \ln u_i$$

则 P-III 型分布的抽样方法如图 1 所示。

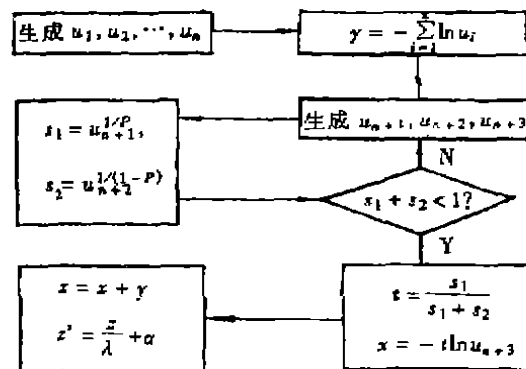


图 1 P-III 型分布的抽样过程

2.2.2 正态分布随机变量抽样

设 u_1, u_2 是 [0,1] 区间上的均匀分布随机数,且相互独立,作下列变换

$$N_1 = \sqrt{-2 \ln u_1} \cos 2\pi u_2 \quad (4a)$$

$$N_2 = \sqrt{-2 \ln u_1} \sin 2\pi u_2 \quad (4b)$$

则可证明^[5], N_1 和 N_2 是相互独立且服从标准正态分布 $N(0,1)$ 的随机变量。对标准正态随机变量作变换

$$Z = \mu + \sigma n \quad (5)$$

即可得到一般正态随机变量 $N(\mu, \sigma)$ 的随机数。

3 P-III 型分布和正态分布样本的拟合检验

首先用 χ^2 检验法对参数处于不同区间的 P-III 型分布和正态分布的抽样结果进行检验,均接受原假设。将 c_i 处于不同区间的 P-III 型分布的抽样结果和理论分布曲线点绘于图 2 和图 3, 可见在 c_i 处于不同区间时,抽样的结果和理论分布相吻合。对正态分布也做了同样的工作,抽样的结果和理论分布亦吻合很好。这样就排除了由于抽样的拟合性不好而引起的 MC 法计算误差,保证了 MC

法计算结果的可信性。

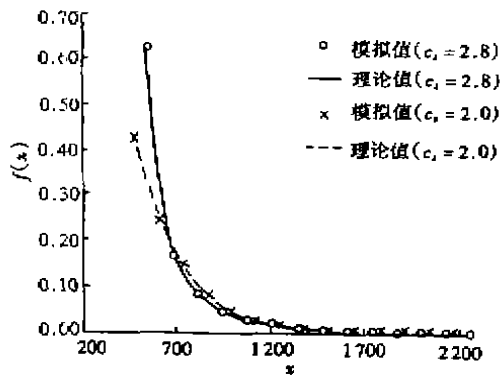


图2 P-Ⅲ型密度函数模拟值与理论值的比较 I

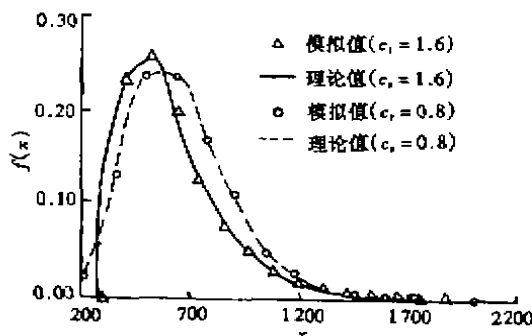


图3 P-Ⅲ型密度函数模拟值与理论值的比较 II

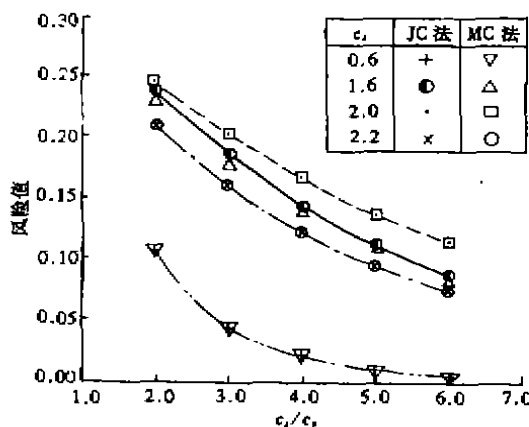


图4 JC法和MC法计算风险值的比较

4 JC法和MC法的对比计算

取P-Ⅲ型分布的参数 c_s 为0.6, 1.6, 2.0, 2.2, 分别对应于1(a)~(d)四种曲线形状, 在每一个 c_s 下, 分别用JC法和MC法计算不同的 c_s/c_v 所对应的风险值, 并点绘于图4中, 这种对比方法既考虑了 c_s 可能的影响, 又考虑了 c_v 的影响。在取 c_s/c_v 的值时,

最小取到2, 这是因为当 $c_s/c_v < 2$ 时, P-Ⅲ型概率密度函数中的 $b < 0$, 这在现实中是不可能出现的。

从图4可以看出, 在P-Ⅲ型不同的密度曲线下, JC法和MC法计算的风险结果十分接近, 其中最大的相对误差只有3.2%。在 c_s/c_v 变化时, 两种方法计算得到的风险值的变化趋势也是相同的。从 c_s 和 c_v 的取值范围可以看出, 对比计算基本上包括了各种可能出现的 c_s 和 c_v 。通过对比计算可以得出这样的结论: 在本文所用的功能函数的非线性程度下, 用JC法计算泄洪风险是可行的, 计算的结果和MC法相比, 有足够的精度。

从计算量看, JC法明显优于MC法, 为保证计算精度, MC法的模拟次数应是风险值倒数的100倍, 本文的算例用JC法计算一个任意大小的风险值所需时间为2s, 而用MC法计算一个 10^{-2} 量级的风险值需2min, 计算一个 10^{-3} 量级的风险值则需17min; 如果功能函数中包含的随机变量数多, 则模拟的时间还要长。如一个包含43个变量的功能函数, 模拟计算100万次(对应的风险为 10^{-4} 量级), 则需要花费4h。

5 结 论

对于P-Ⅲ型分布的不同形式的概率密度曲线, JC法和MC法计算综合风险率所得的结果相近, JC法具有足够的精度; 一般而言, JC法的计算效率远高于MC法; 因此用JC法计算泄洪综合风险是可行的。

参考文献

- 1 Tung Y K. Risk analysis for hydraulic design. J of Hydr Div, ASCE, 1980, 106(HY): 893~913
- 2 徐祖信, 郭子中. 开敞式溢洪道泄洪风险计算. 水利学报, 1989(4): 50~54
- 3 吴世伟. 结构可靠度分析. 北京: 人民交通出版社, 1990. 111~115
- 4 徐士良. FORTRAN 常用算法程序集. 北京: 清华大学出版社, 1992. 40~45
- 5 丛树铮. 水文学的概率统计基础. 北京: 水利出版社, 1981. 136~140, 367~370

(收稿日期: 1996-09-02)