

混凝土微平面本构理论综述

巫昌海

(河海大学土木工程学院 南京 210098)

TU528.01

摘要 介绍建立在微观力学基础上的混凝土微平面本构理论、材料参数的确定方法和有限元分析的实施步骤。基于这一理论所建立的微平面本构模型能够描述混凝土在各种应力状态下的强度和变形特征,且所用材料参数极少,用于混凝土结构非线性有限元分析时能获得合理的结构响应。

关键词 混凝土 微平面模型 本构关系 张量 有限元 虚功原理 混凝土结构

自 70 年代以来,由于混凝土结构非线性有限元分析的发展,其本构关系成了人们关注的焦点。迄今为止,混凝土本构关系的研究总体上可分成两大类型。第一类是宏观唯象模型,即建立在固体力学理论基础上的模型^[1,2],如以弹性理论为基础的线性和非线性弹性模型;以经典塑性理论为基础的全塑性和弹塑性硬化模型;以断裂理论和塑性理论组合起来的塑性断裂模型;以粘性材料本构理论为基础的內时本构模型等。这些理论模型的提出大多在 70 年代及 80 年代初期,虽然用这些本构模型分析钢筋混凝土结构取得了初步成功,但至今尚未获得能描述混凝土普遍性质的本构模型,特别是在三维情况下,该类模型必须采用较多的材料参数,才能获得合理的三维响应。第二类是微观力学模型(即微平面模型)。这类模型的理论基础是由 Taylor 在 1938 年提出的,他认为材料的应力应变关系在微观上可建立在材料内部各个方向的平面(微平面)上,微观与宏观之间的联系(约束)可分为两种情况:①平面上的应力就是宏观应力张量的解析分量,称为静态约束;②平面上的应变就是宏观应变张量的解析分量,称为动态约束。静态约束条件被

应用于描述金属类材料的塑性滑移,即所谓的塑性滑移理论。1977 年 Zienkiewicz 等将静态约束条件用于描述岩土类材料^[3]。到了 80 年代, Bazant 等首先将 Taylor 的理论用于描述混凝土材料的受拉断裂分析^[4,5],并发现采用静态约束会导致应变软化区段的不稳定,故采用了动态约束,后来又将其推广到描述混凝土材料的一般本构特性^[6,7],即本文主要介绍的混凝土微平面本构模型。这里的“微平面”即相当于塑性滑移理论中的滑移面,因为混凝土属于脆塑性材料,其内部存在着微裂纹(即骨料之间接触面),故“微平面”也隐含这种“薄弱面”。

1 基本假定

在建立微平面上应力应变关系时,引入 5 个假定:①任一微平面上的应变等于宏观应变张量 ε_{ij} 的解析分量(即动态约束条件);②微平面上的应变由正应变 ε_N 和切应变 ε_T 组成,且切应变 ε_T 的方向与切应力 σ_T 的方向一致;③横向应变(又称约束应变) ε_L 对微平面响应的影响可由体积应变 $\varepsilon_V = \varepsilon_{kk}/3$ 来代替;④在不发生卸载时,每个微平面上的应力应变关系与加载路径无关,在卸载和重新加

作者简介:巫昌海,男,硕士,副教授,从事钢筋混凝土结构研究,曾发表《提高三角网法绘制等值线精度的算法》等论文。

载时,应力应变关系曲线随卸载点不同而不同,但也与加载路径无关;⑤微平面的响应由体积应力应变($\sigma_V \sim \varepsilon_V$)、偏斜应力应变($\sigma_D \sim \varepsilon_D$)与切应力应变($\sigma_T \sim \varepsilon_T$)三者组成,它们各自是相互独立的。

根据假定①,方向余弦为 n_i 的微平面上的正应变向量为

$$\varepsilon_N = n_j n_k \varepsilon_{jk} \quad (1)$$

切应变向量的各分量为

$$\varepsilon_{Ti} = \frac{1}{2} (n_j \delta_{ik} + n_k \delta_{ij} - 2n_i n_j n_k) \varepsilon_{jk} \quad (2)$$

Bazant 等最初将微平面模型用于描述混凝土受拉断裂特征时忽略了切应变,但要描述混凝土的一般特征(如受压破碎等)就不能忽略切应变的影响,这就是引入假定②的理由。

试验已表明,横向正应变 ε_L 对混凝土的脆性有显著的影响,在微平面上 ε_L 由相互垂直的两个应变 $\varepsilon_K, \varepsilon_M$ 组成,它们都垂直于正应变 ε_N ,所以一点的体积应变为

$$\varepsilon_V = \frac{1}{3} (\varepsilon_K + \varepsilon_M + \varepsilon_N)$$

为方便起见,就以 ε_V 来代替 ε_L 的影响,故引入假定③。

对假定④的解释是:微平面本构模型的最终响应(即宏观应力应变关系)是由一部分加载微平面和另一部分卸载微平面组合而成,这种组合的可能性有无数种,所以即使假定单个微平面的应力应变关系与加载路径无关,材料的整体(宏观)响应仍能显示出与加载路径有关的特性。据此微平面应力应变关系可以写成

$$\left. \begin{aligned} \sigma_V &= C_V(\varepsilon_V, \varepsilon_D, \varepsilon_T) \varepsilon_V \\ \sigma_D &= C_D(\varepsilon_V, \varepsilon_D, \varepsilon_T) \varepsilon_D \\ \sigma_T &= C_T(\varepsilon_V, \varepsilon_D, \varepsilon_T, \sigma_C) \varepsilon_T \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 C_V, C_D, C_T 是相应于三条曲线的割线模量。

由假定⑤,式(3)可简化为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_V &= C_V(\varepsilon_V) \varepsilon_V \\ \sigma_D &= C_D(\varepsilon_D) \varepsilon_D \\ \sigma_T &= C_T(\varepsilon_T, \sigma_C) \varepsilon_T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 σ_C 是宏观应力不变量; $\sigma_C = (\sigma_2 + \sigma_3)/2$, σ_2, σ_3 为第二、第三主应力。试验表明 σ_C 对剪切劲度有显著影响,故在微平面剪切响应上要考虑这一影响因素,但 σ_C 在此处是一个标量,不构成式(4)中的基本材料参数。

2 增量型宏观应力应变关系

对式(4)求微分即可得增量型微平面应力应变关系

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_V &= C_V^i d\varepsilon_V - d\sigma_V'' \\ d\sigma_D &= C_D^i d\varepsilon_D - d\sigma_D'' \\ d\sigma_T &= C_T^i d\varepsilon_T - d\sigma_T'' \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 C_V^i, C_D^i, C_T^i 是微平面上相应曲线的切线模量, $d\sigma_V'', d\sigma_D'', d\sigma_T''$ 是微平面上非弹性应力增量。

运用虚功原理,可建立增量型宏观应力增量与微平面上应力增量之间的关系

$$\frac{4}{3} \pi d\sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} = 2 \int_S (d\sigma_N \delta\varepsilon_N + d\sigma_{Ti} \delta\varepsilon_{Ti}) f(n) dS \quad (6)$$

式中 $\delta\varepsilon_{ij}, \delta\varepsilon_N, \delta\varepsilon_{Ti}$ 分别是宏观应变、微平面上正应变、微平面上切应变的微小变量;等号左边表示单位球内的宏观功;等号右边表示沿单位半球 S 的积分; $\frac{4}{3} \pi$ 表示单位球的体积;系数 2 表示单位球面上同一直径两端被积函数值相等; $f(n)$ 是一个考虑材料初始性质的权函数,对普通混凝土可认为是初始各向同性材料,取 $f(n) = 1$ 。

根据式(1)和式(2)可得

$$\delta\varepsilon_N = n_i n_j \delta\varepsilon_{ij}$$

$$\delta\varepsilon_{Ti} = \frac{1}{2} (n_j \delta\varepsilon_{ij} + n_j \delta\varepsilon_{ji} - 2n_i n_j n_r) \delta\varepsilon_{ij}$$

将以上关系式及 $d\sigma_N = d\sigma_V + d\sigma_D$ 代入式(6),经整理后可得宏观应力应变关系

$$d\sigma_{ij} = C_{ijk} d\varepsilon_{km} - d\sigma_{ij}'' \quad (7)$$

式中

$$C_{ijk} = \frac{3}{2\pi} \int_S [(C_D^i - C_T^i) n_i n_j n_k n_m + \frac{1}{3} (C_V^i - C_D^i) n_i n_j \delta_{km} +$$

$$\frac{1}{4} C_T^0 (n_i n_k \delta_{jm} + n_i n_m \delta_{jk} + n_j n_k \delta_{im} + n_j n_m \delta_{ik})] f(\mathbf{n}) dS \quad (8)$$

$$d\sigma_{ij}'' = \frac{3}{2\pi} \int_S [n_i n_j d\sigma_N'' + \frac{1}{2} (n_i \delta_{ij} + n_j \delta_{ji} - 2n_i n_j n_r) d\sigma_{Tr}''] f(\mathbf{n}) dS \quad (9)$$

3 材料参数的确定

由以上推导可见,一旦建立了微平面上的应力应变关系,即可由式(8)、式(9)求得一点的宏观应力应变关系。在描述微平面应力应变关系时^[6],对式(4)中的割线模量取用了以下的经验函数:

当 $\varepsilon_V < 0$ 时

$$C_V = C_V^0 [1 + \left| \frac{\varepsilon_V}{a} \right|^{-p} + \left| \frac{\varepsilon_V}{b} \right|^q] \quad (10)$$

当 $\varepsilon_V \geq 0$ 时

$$C_V = C_V^0 \exp\left(-\left|\frac{\varepsilon_V}{a_1}\right|^{p_1}\right) \quad (11)$$

当 $\varepsilon_D \geq 0$ 时

$$C_D = C_D^0 \exp\left(-\left|\frac{\varepsilon_D}{a_1}\right|^{p_1}\right) \quad (12)$$

当 $\varepsilon_D < 0$ 时

$$C_D = C_D^0 \exp\left(-\left|\frac{\varepsilon_D}{a_2}\right|^{p_2}\right) \quad (13)$$

$$C_T = C_T^0 \exp\left(-\left|\frac{\varepsilon_T}{a_5}\right|^{p_3}\right) \quad (14)$$

式(14)中

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } \sigma_C \geq 0 \text{ 时, } a_5 = a_3 \\ &\text{当 } \sigma_C < 0 \text{ 时, } a_5 = a_3 - \frac{a_4}{f_c} \sigma_C \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

初始加载时,混凝土接近于线弹性材料,式(8)中微平面上切线模量 C_V^0, C_D^0, C_T^0 就是式(11)~(14)中的初始切线模量 C_V^0, C_D^0, C_T^0 ,如果是线弹性各向同性材料,则 C_V^0, C_D^0, C_T^0 保持不变,且与微平面的方位无关,由此可得出式(8)的显式积分,它和弹性理论中的本构关系应该是一致的,根据文献[6]的推导, C_V^0, C_D^0, C_T^0 与两个弹性常数 E (弹性模量)及 μ (泊松比)之间有如下关系

$$C_V^0 = \frac{E}{(1-2\mu)} \quad (16)$$

$$C_D^0 = \eta_0 C_V^0 \quad (17)$$

$$C_T^0 = \frac{1}{3} \left[\frac{5(1-2\mu)}{(1+\mu)} - 2\eta_0 \right] \quad (18)$$

对混凝土材料,在已知初始弹模 E 及泊松比 μ 时,只要确定一个材料参数 η_0 ,就可由式(16)~(18)计算微平面的 C_V^0, C_D^0, C_T^0 。

在静水压力作用下,微平面上只有体积应变,其应力应变关系简化为 $\sigma_V = C_V \varepsilon_V$, C_V 由式(10)确定,根据静水压力作用下的试验结果,可直接用曲线拟合的方法确定式(10)中的材料常数 a, b, p, q 。根据多组试验结果的拟合分析,这4个参数的值对普通混凝土来说基本上保持不变: $a = 0.005, b = 0.225, p = 0.25, q = 2.25$ 。

式(11)~(15)中的材料参数 $a_1, a_2, a_3, a_4, p_1, p_2, p_3$ 以及式(17)、式(18)中的 η_0 ,可根据试验结果用优化方法来确定,根据文献[6]的确定发现 p_1, p_2, p_3 基本上为常数: $p_1 = 0.5, p_2 = p_3 = 1.5$,故微平面本构模型最后只要确定5个参数 $a_1, a_2, a_3, a_4, \eta_0$ 。附表为根据一些学者所做试验的优化材料参数值^[6,7]。

附表 材料参数优化值

试验者	η_0	a_1 / $\times 10^{-4}$	a_2 / $\times 10^{-3}$	a_3 / $\times 10^{-3}$	a_4 / $\times 10^{-3}$
Balmer	0.85	5.0	2.5	1.8	10.0
Bazant 等	1.00	5.0	1.0	1.0	0
Green 等	1.00	4.0	2.0	1.7	0
Hongnestad 等	0.50	5.0	2.5	1.5	0
Kotsovos 等	0.85	5.0	5.0	10.0	16.0
Kupfer 等	0.60	1.0	5.0	1.1	0.9
Peterson 等	0.25	0.3	0.5	0.5	0
Sinha 等	0.50	5.0	3.2	1.6	0
Vanmier 等	0.85	4.0	4.3	1.8	2.0

4 有限元计算步骤及应用

上述微平面模型在进行钢筋混凝土非线性有限元分析时,采用增量等刚度迭代时,可按下述步骤进行。

a. 取荷载增量,计算该荷载步初始切线刚度矩阵。

b. 由初始刚度矩阵求位移增量、应变增量及总应变。

c. 计算微平面上应变分量及张量 C_{ijkn} 和 $d\sigma_{ij}''$ 。

d. 由式(7)计算应力增量,并将其叠加到前一迭代步的应力上。

e. 计算节点力,并根据当前荷载计算残余力,如残余力大于规定的精度,则转入步骤 b,否则转入步骤 a,进行新一步荷载计算。

以上计算步骤 c 在求 C_{ijkn} 及 $d\sigma_{ij}''$ 时需要求半球面上的数值积分,用普通高斯积分需要 28 个积分点,文献[8]采用 21 个积分点的改进方法,即可获得足够的精度。

作为实际应用, Bazant 等^[9]首先用微平面模型分析了受拉和受压试块,得出了试块内微裂缝的逐步开展过程,并引入了“非局部”(nonlocal)处理方法,取得了较稳定的软化区段(下降段),进而验证了微平面模型的合理性。Blazic 等^[10]将微平面模型用于分析四角支承于柱子上的平板钢筋混凝土结构,获得了比其它本构模型更稳定、更合理的解答。Ozbolt 等^[11]用微平面模型对埋于素混凝土结构内的螺栓进行了拔出模拟分析,获得了与试验相吻合的结论,并进一步对此类结构进行了大量数值分析,从而减少了拔出锚固试验的工作量。

5 结 语

本文所述的混凝土微平面本构模型具有概念简单明了,能够描述混凝土的普遍特性(如受拉或受压应变软化及由此引起的体积膨胀,在静水压力作用下由脆性转为塑性且无极限强度等),且所用材料参数较少的特点。但在用于混凝土结构有限元分析时,求每个积分点的应力增量需要计算球面积分,因而占用了可观的计算机时,但在计算机容量及速度飞速发展的今天,相信用这模型分析大型结构是完全能做到的。

参考文献

- 1 沈聚敏,王传志,江见鲸. 钢筋混凝土有限元与板壳极限分析. 北京:清华大学出版社,1993
- 2 宋玉普,赵国藩. 钢筋混凝土结构分析中的有限单元法. 大连:大连理工大学出版社,1994
- 3 Zienkiewicz O C, Pande G N. Time-dependent multilaminate model of rocks—a numerical study of deformation and failure of rock masses. *Int Jour of Num and Anal Meth in Geomechanics*, 1977(1):219~247
- 4 Bazant Z P, Cambarora P G. Gack Shear in concrete: crack band microplane model. *Jornal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1984, 105(3): 407~428
- 5 Bazant Z P, Oh B H. Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1985, 114(4):559~582
- 6 Bazant Z P, Prat P C. Microplane model for brittle-plastic material—Parts I, II. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1988, 114(10):1672~1702
- 7 Bazant Z P. Microplane model for strain-controlled inelastic behavior. New York: *Mechanics of Engineering Materials*, 1984:45~59
- 8 Bazant Z P, Oh B H. Efficient numerical intergration on the surface of a sphere. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1986, 66(1):37~49
- 9 Bazant Z P, Ozbolt J. Nonlocal microplane model: tensile and compressive fractures and triaxial damage. In: Bicanic N ed. *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*. Swansea, U K Pineridge Press, 1990:809~830
- 10 Blazic S, Ozbolt J. Finite element analysis of reinforced concrete flat plate structure using a microplane model. In: Bicanic N ed. *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*. Swansea, U K Pineridge Press, 1990:291~302
- 11 Ozbolt J, Eligehausen R. Numerical analysis of headed studs embeded in large plain concrete blocks. In: Bicanic N ed. *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*. Swansea, U K Pineridge Press, 1990:645~656

(收稿日期:1996-03-11 编辑:马敏峰)