

弹性力学的 Hamilton 求解体系

③
11-15

周建方

卓家寿

0343

(河海大学常州分校 常州 213022) (河海大学土木工程学院 南京 210098)

摘要 与传统的减少未知量提高微分方程阶次的方法不同,弹性力学的 Hamilton 求解体系是将弹性力学的微分方程化成一阶正则方程,然后再行求解。本文以平面问题为例,首先介绍其 Hamilton 正则方程及推导过程和采用分离变量法进行解析求解的主要思想,然后介绍在一个方向采用解析函数,另一个方向离散采用数值方法的半解析求解方法,最后对弹性力学 Hamilton 求解体系的优缺点和今后的发展作了简要的评价和展望。

关键词 弹性力学 Hamilton 体系 Hamilton 正则方程 解析解 半解析解

在弹性力学中,就一般问题而言,有位移、应力、应变 15 个未知量和平衡、几何、物理 15 个方程以及一定的边界条件。面对如此多的方程和未知量,传统的做法是尽量减少未知量,从而造成偏微分方程阶次的提高,然后再对提高后的偏微分方程求解,如位移法、应力法等,这种方法属于 Lagrange 求解体系。

19 世纪,Hamilton 将牛顿运动定律改写成了所谓的正则方程形式,从而将二阶运动方程组化为一阶正则方程组,其思路刚好与上相反。近年,冯康教授等经过深入的研究,指出对动态问题的计算方法而言,Lagrange 系统很可能不是合理的选择,合理的选择应是 Hamilton 系统^[1,2]。钟万勰教授等则将 Hamilton 系统引入弹性力学中^[3,4],从而发展了弹性力学新的求解体系^[5]。本文试图对此求解体系作一介绍和评述。

1 Hamilton 正则方程及其推导

弹性力学中的 Hamilton 正则方程推导可以有几种方法,下面以平面应力情况为例,从 Hellinger-Reissner 两类变量变分原理推导。

$$\Pi = \iint_{\Omega} [\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y + \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}^2 - f_x u - f_y v] dx dy + \text{边界项} \quad (1)$$

代入应力、位移方程以消去 σ_x :

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \sigma_y \quad (2)$$

整理可得:

$$\Pi = \iint_{\Omega} (\sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} - \omega) dx dy + \text{边界项} \quad (3)$$

其中:

$$\omega = -\frac{E}{2} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 - \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{2E} \sigma_y^2 - \nu \sigma_y \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}^2 + f_x u + f_y v \quad (4)$$

令 $\delta \Pi = 0$, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial \omega}{\partial \sigma_y}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \omega}{\partial \tau_{xy}}, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= -\frac{\partial \omega}{\partial v}, & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= -\frac{\partial \omega}{\partial u} \end{aligned} \quad (5)$$

采用记号:

$$\mathbf{q} = (v, u)^T, \mathbf{p} = (\sigma_y, \tau_{xy})^T \quad (6)$$

第一作者简介:周建方,男,博士,副教授,从事计算力学和固体力学研究,曾发表《弧门主框架自振频率计算》等论文。

则式(5)可写为

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{q}} \quad (7)$$

如果将 y 看成是动力学中的时间 t , 则式(7)就是平面弹性力学问题中的 Hamilton 正则方程。将式(7)进一步展开, 有

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} v \\ u \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\nu \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1-\nu^2}{E} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -E \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\nu \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v \\ u \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_y \\ f_x \end{Bmatrix} \quad (8)$$

因其变量中包含位移和应力, 一般也称为混合方程。式(8)也可直接从弹性力学的平衡、物理、几何方程推得。

弹性力学的 Hamilton 正则方程还可以从最小势能原理(采用 Legendre 变换)^[3]、最小余能原理、广义余能原理推得^[6]。

2 解析解

很显然, 对 Hamilton 正则方程或混合方程, 要直接解出其解析解, 并不是一件简单的事, 现在主要采用的是分离变量法^[3,4], 而弹性力学问题一般也只有进入 Hamilton 体系, 才能采用分离变量法。

不失一般性, 考虑如图 1 所示区域: $0 < x < l, 0 < y < a$ 。边界条件为: 当 $x = 0, l$ 时, $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0$; 当 $y = 0, a$ 时, 有位移或应力



图 1 求解区域

边界条件。将式(8)缩写成:

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{F}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

与式(8)相比, 不难得到式中各量的表达式。进一步引入所谓的全状态向量:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^T \quad (10)$$

则式(9)可表示为

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = \mathbf{H} \mathbf{w} - (0, \mathbf{f})^T \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{F}^T \end{bmatrix} \quad (12)$$

引入换位旋转算子矩阵 $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J} \quad (13)$$

$\mathbf{J}$ 实际是辛空间的度量矩阵。不难证明有:

$$\mathbf{J} \mathbf{H} \mathbf{J} = \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{G} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (14)$$

满足上式的算子矩阵称为 Hamilton 算子矩阵。设 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是满足边界条件的两个全状态向量, 则有

$$\int_0^l (\mathbf{J} \mathbf{w}_1)^T \mathbf{H} \mathbf{w}_2 dx = \int_0^l \mathbf{w}_2^T \mathbf{H}^T (\mathbf{J} \mathbf{w}_1) dx \quad (15)$$

$\mathbf{H}^T$ 与 $\mathbf{H}$ 的关系就体现在上式中, 它对解的性质有重要意义。

现求式(11)的解。先考虑齐次方程, 即 $\mathbf{f} = 0$ 的情况。设

$$\mathbf{w}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(y) X_i(x) \quad (16)$$

其中 X_i 是矢量, Y_i 是标量。代入式(11)易得:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y} = \mu_i Y_i, \quad \mathbf{H} X_i = \mu_i X_i \quad (17)$$

其中 μ_i 是 Hamilton 算子矩阵 $\mathbf{H}$ 的特征值, 待求。这样问题便转化为求 Hamilton 算子矩阵的特征值和特征矢量。可以证明, 特征值分为两部分, 第一部分为 $\mu = 0$, 且为 6 重特征根, 对应的特征矢量及解分别表示两个方向的刚体位移、刚体旋转、轴向拉压、纯弯曲、

常剪弯曲,即为二维的圣维南解。第二部分为 $\mu \neq 0$,由 Hamilton 算子矩阵的特性又可分为两组:

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ 组: } \operatorname{Re}(\mu_{ai}) < 0; \\ b \text{ 组: } \mu_{bi} = -\mu_{ai}, \text{ 因而 } \operatorname{Re}(\mu_{bi}) > 0 \end{array} \right\} \quad (18)$$

相应地可区分 X_i, Y_i 和 X_{-i}, Y_{-i} , 于是齐次方程的解为

$$w = \sum_{i=1}^6 a_i w_i + \sum_{i=1}^{\infty} (c_i e^{\mu_i y} X_i + c_{-i} e^{-\mu_i y} X_{-i}) \quad (19)$$

式中 a_i, c_i, c_{-i} 由 y 方向的边界条件确定。由第二项的表达式可以看出,所组成的两项分别向 y 的正向、负向按指数衰减。这些解为圣维南原理所覆盖的解。文献[3]据此计算了在 $y=0$ 处完全固定的半无穷长条形域单向拉伸问题,最后得到了边缘角点处是应力奇点的结果。

对于非齐次问题,则可采用求特解的办法,或将右端项按 X_i 展开(利用辛正交关系是可以做到的),然后代入式(11)就可求得通解。再由 y 向边界条件确定常数,不再细述。

3 半解析解

从上面推导可以看出,解析求解是一件非常烦杂的事,而且大量的课题求解析解是极其困难的,因此数值法仍是 Hamilton 体系中的主要手段,而目前则以半解析法为主^[7-10],其思路是一个方向采用解析函数,另一个方向离散采用数值方法。下面以图 1 为例介绍根据 Hellinger-Reissner 变分原理导出的半解析法。

采用 x 方向离散,为此沿 x 方向剖分 n 个单元, $n+1$ 个节点,这样图 1 变成图 2 的情况。单元长度可以任意。设每个节点的节点参数为

$$w_i = (u_i, \sigma_{yi}, \tau_{xyi}, v_i)^T \quad (20)$$

由于它既包含位移,又包含应力,是一个混合状态空间向量,所以单元称为混合状态元。需注意它们都是 y 的函数,与 x 无关。

按照图 2 的剖分,式(3)的积分区域就变成:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^a \int_0^l (\sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} - \omega) dx dy + \text{边界项} \\ &= \int_0^a \sum_{e=1}^n \int_{x_e}^{x_{e+1}} (\sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} - \omega) dx dy + \text{边界项} \end{aligned} \quad (21)$$

其中 e 是单元符号, $i=0, 1, \dots, n$ 是节点符号。

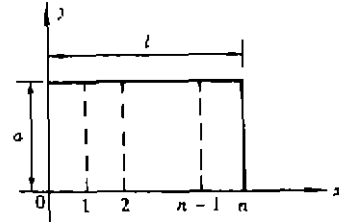


图 2 单元离散

下面进行一个单元的推导,其它类推。在单元 $e=1, x \in (0, h)$ 上, $h = x_1 - x_0$ 是单元步长,采用线性插值:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 N_0 + u_1 N_1 \\ \sigma_y &= \sigma_{y0} N_0 + \sigma_{y1} N_1 \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy0} N_0 + \tau_{xy1} N_1 \\ v &= v_0 N_0 + v_1 N_1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

N_0, N_1 是形函数:

$$N_0 = 1 - \frac{x}{h}, \quad N_1 = \frac{x}{h} \quad (23)$$

将式(22)代入式(21),由 $\delta \Pi = 0$ 可得 8 个方程,写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

其中:

$$\begin{aligned} M_{00} = M_{11} &= \begin{bmatrix} h/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h/3 \end{bmatrix} \\ M_{01} = M_{10} &= \begin{bmatrix} h/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h/6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{00} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)h}{3E} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{E}{h} & -\frac{\nu}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{2} & \frac{1-\nu^2}{3E}h & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_{01} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1+\nu}{3E}h & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{E}{h} & -\frac{\nu}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1-\nu^2}{6E}h & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_{10} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1+\nu}{3E}h & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{E}{h} & \frac{\nu}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{2} & \frac{1-\nu^2}{6E}h & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)h}{3E} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{E}{h} & \frac{\nu}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1-\nu^2}{3E}h & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$f_0 = f_1 = (0, -\frac{f_y}{2}h, -\frac{f_x}{2}h, 0)^T \quad (25)$$

这里没有考虑边界项。对于其它单元,可以得到完全类似的列式,只不过这时 $h = x_i - x_{i-1}$ 。把所有单元阵拼装在一起就可得到总阵:

$$M \frac{\partial w}{\partial y} = Bw + f \quad (26)$$

这就是半解析解的控制方程,它是 $4 \times (n+1)$ 个一阶微分方程组,在 $y=0, a$ 两边上可以提供 $4 \times (n+1)$ 个边界条件,所以求式(26)可以求得唯一解。对于 x 边上的边界条件,则必须放在式(21)中考虑,这时式(25)中

的一些表达式将有所不同,但最后仍有式(24)或(26)。文献[8~10]利用此法成功地求解了复合材料板尤其是叠层板,结果表明,所用单元不多,但精度较高,特别是可考虑剪切效应。

4 评述和展望

Hamilton 体系引入弹性力学中还是近几年的事,给这门古老的学科带来了生机,使弹性力学求解进入了一个新天地,为解决工程实际问题又增添了新思路、新方法。与传统的求解方法相比,其优缺点主要体现在以下几点:

a. 除一些特殊形式的结构,传统的弹性力学问题解析求解时往往采用凑合法(半逆解法),有时使人无所适从,而进入 Hamilton 体系后,则可采用分离变量法,这是一个求解偏微分方程的一般方法,有规律可循,解题思路明晰,特别是可找到原凑合法忽略的解,或由圣维南原理覆盖掉的解,使对问题的认识更深入一步。缺点是过程较为繁琐。

b. 对于复合材料尤其是层状结构,Hamilton 体系特别适用。由于求解过程中没作任何人为的假设,从而考虑了剪切效应的影响,保证了层间位移和应力 σ_y, τ_{xy} 连续,而对 σ_x 则由与式(2)类似的式子计算,自然不连续,与实际情况相符。因此,对于复合层板、碾压混凝土坝、成层地基的计算,Hamilton 方法有广泛的应用前景。

c. 对于动态问题,Hamilton 方法将是其它方法所不能比拟的。文献[1]的工作表明,Hamilton 算法在稳定性方面具有独特的优越性。因此,只要在辛几何框架内,动态问题的解都会收敛于真实解。

d. 由于应力作为未知量,与位移具有同等精度。这比传统有限元方法好,在传统有限元中通常应力的精度比位移低,要使应力与位移有同等精度,必须采用特殊方法或特殊单元。而在工程实际中,人们关心应力往往甚于位移。

e. 与传统有限元法相比,这里的半解析

法节点数、单元数少,便于处理。与有限条法相比,它的边界条件可以是混合边界条件,包括力和位移,因此处理范围更广泛。半解析法的缺点是需要进行较多的矩阵运算,尤其要求逆,且矩阵一般不正定对称。

经过几位研究者的辛勤努力,虽然目前弹性力学的 Hamilton 求解体系的框架已经大致建立,但还有许多工作要做。例如,有关数学基础和严格证明还有待建立,目前找到解析解的问题还微乎其微,复杂形状的边界,非线性问题以及如何解决工程实际问题还有待开拓。无疑 Hamilton 体系的发展前景是非常广阔的,其半解析法有希望成为有限元、边界元、有限条法后的强有力的计算方法。

参考文献

- 1 冯康,秦孟兆. Hamilton 动力体系的 Hamilton 算法. 自然科学进展, 1991, 1(2): 110 ~ 120
- 2 Feng Kang. How to compute properly Newton's equation of motion? In: Ying Lungan, Guo Benyu eds. Proceedings of the Second Conference in Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1991, Tianjin. Singapore: World Scientific, 1991. 15 ~ 22
- 3 钟万勰. 条形域弹性平面问题与哈密顿体系. 大连理工大学学报, 1991, 31(4): 373 ~ 384
- 4 钟万勰. 分离变量法与哈密顿体系. 计算结构力学及其应用, 1990, 8(3): 229 ~ 240
- 5 钟万勰. 弹性力学求解新体系. 大连: 大连理工大学出版社, 1995
- 6 周建方, 卓家寿. 弹性力学混合方程和 Hamilton 正则方程的几种推导方法. 河海大学学报, 1997, 25(6): 119 ~ 121
- 7 欧阳华江, 钟万勰. 一类基于 Hamilton 体系的半解析法. 计算结构力学及其应用, 1993, 10(2): 129 ~ 136
- 8 唐立民. 混合状态 Hamilton 元的半解析解和叠层板的计算. 计算结构力学及其应用, 1992, 9(4): 347 ~ 360
- 9 邹贵平, 唐立民. 复合材料条形域问题的混合 Hamilton 元的半解析解. 力学与实践, 1993, 15(6): 29 ~ 34
- 10 邹贵平, 唐立民. 板问题混合变量等参 Hamilton 元的半解析解. 上海力学, 1993, 14(4): 16 ~ 25

(收稿日期: 1997-04-01 编辑: 熊水斌)

· 简讯 ·

三刊联合召开“'98 洪灾”座谈会

1998 年 9 月 7 日,《水利水电科技进展》编辑部、《河海大学学报》编辑部、《水科学进展》编辑部联合邀请河海大学和南京水文水资源研究所的部分水利专家对“'98 洪灾”进行了座谈。专家们畅所欲言,从科学和技术角度出发,对造成“'98 洪灾”的原因,现有水利工程在洪灾中发挥的作用和暴露出的问题,以及如何完善防洪设施,加强防汛工作等热点问题进行了探讨。

专家们认为,“'98 洪灾”是在多种自然与非自然因素的共同作用下形成的,十分复杂,各种因素对洪水的影响程度也各不相同,需要对各种成因进行深入地分析。在谈到现有防洪设施暴露出来的问题时,专家们认为,现有江河堤防的建设质量差别很大,值得关注;现有滞洪区的人口增长过快,经济盲目发展,影响滞洪功能的发挥。至于一些媒体极力宣传的生态环境破坏对“'98 洪灾”造成的巨大影响,许多专家不完全赞同,认为植被对径流量的调节有一定作用,但不能保证不发生洪水。对今后的防洪措施,专家们也提出了很好的建议,如防洪标准应该是系统的、长效的,对现有防洪标准应有一个全面的再认识;要重视洪水数据的定量分析,通过全面的定量分析,摸清可能出现的雨情、水情和工情,从而避免可能出现的灾情。

专家们认为,对今年的特大洪水及其影响尚需作深入的调查研究,掌握准确的数据,才能得出规律性的认识,指导今后的防洪抗洪。因此希望编辑部今后多组织一些调查研究后的专题文章发表,交流洪灾研究成果。为此,本刊除于近期组织一次“'98 抗洪纵横谈”笔会外,还将陆续发表由国内部分著名专家、学者和参加抗洪战斗的工程技术人员撰写的专论文章,分析原因,总结经验教训,交流观点,提出建议。热烈欢迎专家们投稿,为我国的水利建设献计献策。

(本刊编辑部供稿)