

灰色预测模型 GM(1,1) 在延长黄山地区 水位流量关系中的应用

张善余

章彩霞

(黄山市水文水资源局 安徽黄山 245000)

摘要 用灰色预测模型 GM(1,1) 对历年水位流量关系较为稳定单一、冲淤变化不大的屯溪站和芦溪站的水位流量关系进行拟合, 外延屯溪 1996 年特大洪水最高洪水位 (10.72 m, 1942 年以来最高水位)、芦溪 1996 年特大洪水最高洪水位 (80.64 m, 1824 年以来最高水位) 的最大洪峰流量, 并据此外延推求高水流量, 其精度符合规范要求。

关键词 灰色系统; 预测模型; 高水位; 水文资料整编 水位流量关系

在水文测验中, 山区性河流特高水位时, 洪水暴涨暴落, 历时短, 流速大, 漂浮物多, 最大洪峰流量难以施测。为推求高水位未测得的洪峰流量, 可用多种方法进行高水延长。

灰色系统理论^[1]对如何解决包含已知和未知信息系统的问题提供了新途径。灰色系统所建立的 GM(1,1) 模型应用于水位流量关系的高水延长, 是基于原水位流量关系的已知信息, 用“累加生成”对原始数据进行处理, 再用生成数据建立 GM(1,1) 模型, 并对实测的水位流量关系进行拟合, 外延推求高水流量^[2]。

1 建立模型

1.1 建模原理

设变量 $x_{(t)}$ 的原始数列为

$$\{x_{(k)}^{(0)} \mid k = 1, 2, \dots, n\} = [x_{(1)}^{(0)}, x_{(2)}^{(0)}, \dots, x_{(n)}^{(0)}] \quad (1)$$

生成一次累加序列

$$\{X_{(k)}^{(1)} \mid k = 1, 2, \dots, n\} = [X_{(1)}^{(0)}, X_{(2)}^{(0)}, \dots, X_{(n)}^{(0)}] \quad (2)$$

其中
$$X_{(k)}^{(1)} = \sum_{i=1}^k x_{(i)}^{(0)}$$

建立 GM(1,1) 模型

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} + aX^{(1)} = u \quad (3)$$

其中
$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

$$Y = [x_{(2)}^{(0)}, x_{(3)}^{(0)}, \dots, x_{(n)}^{(0)}]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x_{(2)}^{(1)} + x_{(1)}^{(1)}) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x_{(3)}^{(1)} + x_{(2)}^{(1)}) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x_{(n)}^{(1)} + x_{(n-1)}^{(1)}) & 1 \end{bmatrix}$$

式中: B 为数据矩阵; B^T 为 B 的转置矩阵; $(B^T B)^{-1}$ 为 $B^T B$ 的逆矩阵。

求解上述微分方程得:

$$\hat{X}_{(t+1)}^{(1)} = (x_{(1)}^{(0)} - \frac{u}{a})e^{-at} + \frac{u}{a} \quad (4)$$

还原得:

$$\hat{X}_{(k+1)}^{(0)} = \hat{X}_{(k+1)}^{(1)} - \hat{X}_{(k)}^{(1)} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

1.2 模型精度检验

记 k 时刻残差为 $\varepsilon_{(k)}^{(0)}$, 则

$$\varepsilon_{(k)}^{(0)} = x_{(k)}^{(0)} - \hat{x}_{(k)}^{(0)} \quad (6)$$

残差均值

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\varepsilon_{(k)}^{(0)}) \quad (7)$$

残差方差

$$S_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\varepsilon_{(k)}^{(0)} - \bar{\varepsilon})^2 \quad (8)$$

原始数据 $\bar{x}^{(0)}$ 及方差 S_1^2 分别为

$$\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{(k)}^{(0)}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{(k)}^{(0)} - \bar{x}^{(0)})^2$$

其方差比

$$C = S_2/S_1 \quad (9)$$

小误差概率 p 为

$$p = P\left\{\left|\varepsilon_{(k)}^{(0)} - \bar{\varepsilon}^{(0)}\right| < 0.6745 S_1\right\} \quad (10)$$

按上述两项指标,其精度检验指标见表 1.

表 1 精度检验指标

预测精度等级	P	C
好	>0.95	<0.35
合格	>0.80	<0.50
勉强	>0.70	<0.65
不合格	≤ 0.70	≥ 0.65

2 实例

2.1 屯溪站高水延长

1996 年黄山市出现历史特大洪水。屯溪站最高洪水水位 10.72 m, 为 1942 年以来最高水位。该站 1996 年因缆道未建, 未进行测流, 推流采用历年综合线, 并用测验整编规范所用的比降面积法、历年 $Z \sim Q$ 关系线, 以及预报用的新安江模型、多变量洪水预报模型等多种方法计算平均值, 推得最高水位 10.72 m 的最大流量为 6500 m³/s。取 9.6 m 以下有密集的流速仪测流点据, 成果较可靠(在 9.6 m 以上时仅有 1969 年水位(10.10 m)一个点据)。笔者用 GM(1,1)模型对屯溪站历年综合水位流量关系线进行模拟, 外延推求高水位的流量, 并据此与其它方法比较。

建模所选数据列于表 2。

表 2 屯溪站高水水位流量关系

水位 Z/m	7.50	8.00	8.50	9.00
流量 $Q/(m^3 \cdot s^{-1})$	2970	3440	3920	4400

根据建模原理设计了计算机程序, 在计算机上对所选数据进行计算, 建立屯溪站高水 GM(1,1)模型为

$$\hat{Q}_{k+1}^{(1)} = 26493e^{0.1223k} - 23523 \quad (11)$$

对该模型进行精度检验:

$$S_1 = 615.819$$

$$S_2 = 17.321$$

$$C = 0.028 < 0.35$$

$$p = 1.0 > 0.95$$

因此, 由表 1 知: $p > 0.95$; $C < 0.35$, 模型精度等级为好, 可用来预测高水流量。其外延值与其它方法的比较见表 3。

表 3 高水延长流量值比较

水位 Z/m	$Z \sim Q$ 线上流量 $Q/(m^3 \cdot s^{-1})$	GM(1,1)模型计算 流量 $\hat{Q}/(m^3 \cdot s^{-1})$	$\frac{\hat{Q} - Q}{Q}/\%$
9.5	4900	4980	1.6
10.0	5530	5620	1.6
10.5	6200	6350	2.4
10.72	6500	6720	3.4

注: 当水位 $Z = 10.72$ m 时, 用比降面积法求得 $Q = 6730$ m³/s; 用 1969 年 $Z \sim Q$ 线求得 $Q = 6600$ m³/s; 用新安江模型求得 $Q = 6400$ m³/s; 用多变量参数法求得 $Q = 6300$ m³/s; 其均值为 6500 m³/s。

由上述可知, 用 GM(1,1)模型延长水位 1.72 m, 与其它方法相比, 误差小于 3.4%, 最大误差 6.7%, 接近规范^[3]规定的比降面积法。可见, 用 GM(1,1)模型拟合, 外延 $Z \sim Q$ 关系线是可行的。

2.2 芦溪站高水延长

芦溪站 1996 年最高洪水水位 80.64 m, 为 1824 年以来最高水位。在 79.50 m 以下有流速仪测流点据, 在其以上部分需进行高水延长。表 4 为摘录的芦溪站 1996 年实测水位流量点据。

表 4 芦溪站高水水位流量关系

水位 Z/m	78.0	78.5	79.0	79.5
流量 $Q/(m^3 \cdot s^{-1})$	2120	2320	2530	2760

芦溪站高水 GM(1,1)模型为

$$\hat{Q}_{k+1}^{(1)} = 25570e^{0.086788k} - 23450 \quad (13)$$

将计算结果与定线时采用的比降面积法外延成果比较(表 5)可见, 两者成果相近, 相对误差在 5% 以内。由此可知, 该模型可与其它方法参照用于芦溪站高水延长。

表 5 GM(1,1)模型与比降面积法外延比较

水位 Z/m	比降面积法流量 $Q/(m^3 \cdot s^{-1})$	GM(1,1)模型计算 流量 $\hat{Q}/(m^3 \cdot s^{-1})$	$\frac{\hat{Q} - Q}{Q}/\%$
80.05	3170	3130	1.2
80.50	3440	3280	4.7
80.64	3520	3360	4.5

3 结 语

利用 GM(1,1)模型外延水位流量关系方法简单方便, 只要有足够的实测点据, 拟合关系不会发生反曲现象, 在一定水位变幅内可达到较高精度, 符合规范要求, 是延长水位流量关系行之有效的一新方法。

参考文献

- 1 邓聚龙. 灰色系统基本方法. 武汉: 华中理工学院出版社, 1981
- 2 徐德龙. 灰色预测 GM(1,1)模型在水位流量关系高水延长中的应用. 水资源研究, 1993(1): 45~49
- 3 SD244—87 水文年鉴编印规范

(收稿日期: 1998-06-01 编辑: 马敏峰)