

# 灰色预测模型 GM (1, 1)在延长黄山地区 水位流量关系中的应用

张善余      章彩霞

(黄山市水文水资源局 安徽黄山 245000)

**摘要** 用灰色预测模型 GM (1, 1)对历年水位流量关系较为稳定单一、冲淤变化不大的屯溪站和芦溪站的水位流量关系进行拟合,外延屯溪 1996 年特大洪水最高洪水位(10.72 m, 1942 年以来最高水位)、芦溪 1996 年特大洪水最高洪水位(80.64 m, 1824 年以来最高水位)的最大洪峰流量,并据此外延推求高水流量,其精度符合规范要求。

**关键词** 灰色系统;预测模型;高水位;水文资料整编

在水文测验中,山区性河流特高水位时,洪水暴涨暴落,历时短,流速大,漂浮物多,最大洪峰流量难以施测。为推求高水位未测得的洪峰流量,可用多种方法进行高水延长。

灰色系统理论<sup>[1]</sup>对如何解决包含已知和未知信息系统的问题提供了新途径。灰色系统所建立的 GM (1, 1)模型应用于水位流量关系的高水延长,是基于原水位流量关系的已知信息,用“累加生成”对原始数据进行处理,再用生成数据建立 GM (1, 1)模型,并对实测的水位流量关系进行拟合,外延推求高水流量<sup>[2]</sup>。

## 1 建立模型

### 1.1 建模原理

设变量  $x_{(t)}$  的原始数列为

$$\{x_{(k)}^{(0)} \mid k = 1, 2, \cdots, n\} = [x_{(1)}^{(0)}, x_{(2)}^{(0)}, \cdots, x_{(n)}^{(0)}] \tag{1}$$

生成一次累加序列

$$\{X_{(k)}^{(1)} \mid k = 1, 2, \cdots, n\} = [X_{(1)}^{(0)}, X_{(2)}^{(0)}, \cdots, X_n^{(0)}] \tag{2}$$

其中 
$$X_{(k)}^{(1)} = \sum_{t=1}^k x_{(t)}^{(0)}$$

建立 GM (1, 1)模型

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} + aX^{(1)} = u \tag{3}$$

其中 
$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

$$Y = [x_{(2)}^{(0)}, x_{(3)}^{(0)}, \cdots, x_{(n)}^{(0)}]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x_{(2)}^{(1)} + x_{(1)}^{(1)}) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x_{(3)}^{(1)} + x_{(2)}^{(1)}) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x_{(n)}^{(1)} + x_{(n-1)}^{(1)}) & 1 \end{bmatrix}$$

式中:  $B$  为数据矩阵;  $B^T$  为  $B$  的转置矩阵;  $(B^T B)^{-1}$  为  $B^T B$  的逆矩阵。

求解上述微分方程得:

$$X_{(t+1)}^{(1)} = (x_{(1)}^{(0)} - \frac{u}{a})e^{-at} + \frac{u}{a} \tag{4}$$

还原得:

$$X_{(k+1)}^{(0)} = X_{(k+1)}^{(1)} - X_{(k)}^{(1)} \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{5}$$

### 1.2 模型精度检验

记  $k$  时刻残差为  $\epsilon_{(k)}^{(0)}$ , 则

$$\epsilon_{(k)}^{(0)} = x_{(k)}^{(0)} - \hat{x}_{(k)}^{(0)} \tag{6}$$

残差均值

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\epsilon_{(k)}^{(0)}) \tag{7}$$

残差方差

$$S_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\epsilon_{(k)}^{(0)} - \bar{\epsilon}^{(0)})^2 \tag{8}$$

原始数据  $\bar{x}^{(0)}$  及方差  $S_1^2$  分别为

$$\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{(k)}^{(0)}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{(k)}^{(0)} - \bar{x}^{(0)})^2$$

第一作者简介: 张善余, 男, 高级工程师, 从事水文资料整编和水文预报工作。

C = S2/ S1 (9)

小误差概率 p 为

p = P{ |ε(k)^(0) - ε^(0)| < 0.6745S1 (10)

按上述两项指标, 其精度检验指标见表 1.

表 1 精度检验指标

| 预测精度等级 | P      | C      |
|--------|--------|--------|
| 好      | > 0.95 | < 0.35 |
| 合格     | > 0.80 | < 0.50 |
| 勉强     | > 0.70 | < 0.65 |
| 不合格    | ≤0.70  | ≥0.65  |

要

2 实 例

2.1 屯溪站高水延长

1996 年黄山市出现历史特大洪水. 屯溪站最高洪水位 10.72 m, 为 1942 年以来最高水位. 该站 1996 年因缆道未建, 未进行测流, 推流采用历年综合线, 并用测验整编规范所用的比降面积法、历年 Z ~ Q 关系线, 以及预报用的新安江模型、多变量洪水预报模型等多种方法计算平均值, 推得最高水位 10.72m 的最大流量为 6500m³/s. 取 9.6m 以下有密集的流速仪测流点据, 成果较可靠(在 9.6m 以上时仅有 1969 年水位(10.10 m)一个点据). 笔者用 GM(1, 1)模型对屯溪站历年综合水位流量关系线进行模拟, 外延推求高水位的流量, 并据此与其它方法比较.

建模所选数据列于表 2.

表 2 屯溪站高水水位流量关系

| 水位 Z/m                     | 7.50 | 8.00 | 8.50 | 9.00 |
|----------------------------|------|------|------|------|
| 流量 Q/(m³·s <sup>-1</sup> ) | 2970 | 3440 | 3920 | 4400 |

根据建模原理设计了计算机程序, 在计算机上对所选数据进行计算. 建立屯溪站高水 GM(1, 1)模型为

Q\_{k+1}^{(1)} = 26493e^{0.1223k} - 23523 (11)

对该模型进行精度检验:

S1 = 615.819

S2 = 17.321

C = 0.028 <<0.35

p = 1.0 > 0.95

因此, 由表 1 知: p > 0.95; C <<0.35. 模型精度等级为好, 可用来预测高水流量. 其外延值与其它方法的比较见表 3.

表 3 高水延长流量值比较

| 水位 Z/m | Z ~ Q 线上流量 Q/(m³·s <sup>-1</sup> ) | GM(1, 1)模型计算流量 Q/(m³·s <sup>-1</sup> ) | Q-Q/Q/ % |
|--------|------------------------------------|----------------------------------------|----------|
| 9.5    | 4900                               | 4980                                   | 1.6      |
| 10.0   | 5530                               | 5620                                   | 1.6      |
| 10.5   | 6200                               | 6350                                   | 2.4      |
| 10.72  | 6500                               | 6720                                   | 3.4      |

注: 当水位 Z=10.72m 时, 用比降面积法求得 Q=6730m³/s; 用 1969 年 Z ~ Q 线求得 Q=6600m³/s; 用新安江模型求得 Q=6400m³/s; 用多变量参数法求得 Q=6300m³/s; 其均值为 6500m³/s.

由上述可知, 用 GM(1, 1)模型延长水位 1.72m, 与其它方法相比, 误差小于 3.4%, 最大误差 6.7%, 接近规范[3]规定的比降面积法. 可见, 用 GM(1, 1)模型拟合, 外延 Z ~ Q 关系线是可行的.

2.2 芦溪站高水延长

芦溪站 1996 年最高洪水位 80.64 m, 为 1824 年以来最高水位. 在 79.50m 以下有流速仪测流点据, 在其以上部分需进行高水延长. 表 4 为摘录的芦溪站 1996 年实测水位流量点据.

表 4 芦溪站高水水位流量关系

| 水位 Z/m                     | 78.0 | 78.5 | 79.0 | 79.5 |
|----------------------------|------|------|------|------|
| 流量 Q/(m³·s <sup>-1</sup> ) | 2120 | 2320 | 2530 | 2760 |

芦溪站高水 GM(1, 1)模型为

Q\_{k+1}^{(1)} = 25570e^{0.086788k} - 23450 (13)

将计算结果与定时采用的比降面积法外延成果比较(表 5)可见, 两者成果相近, 相对误差在 5% 以内. 由此可知, 该模型可与其它方法参照用于芦溪站高水延长.

表 5 GM(1, 1)模型与比降面积法外延比较

| 水位 Z/m | 比降面积法流量 Q/(m³·s <sup>-1</sup> ) | GM(1, 1)模型计算流量 Q/(m³·s <sup>-1</sup> ) | Q-Q/Q/ % |
|--------|---------------------------------|----------------------------------------|----------|
| 80.05  | 3170                            | 3130                                   | 1.2      |
| 80.50  | 3440                            | 3280                                   | 4.7      |
| 80.64  | 3520                            | 3360                                   | 4.5      |

3 结 语

利用 GM(1, 1)模型外延水位流量关系方法简单方便, 只要有足够的实测点据, 拟合关系不会发生反曲现象, 在一定水位变幅内可达到较高精度, 符合规范要求, 是延长水位流量关系行之有效的又一新方法.

参考文献

1 邓聚龙. 灰色系统基本方法. 武汉: 华中理工学院出版社, 1981  
2 徐德龙. 灰色预测 GM(1, 1)模型在水位流量关系高水延长中的应用. 水资源研究, 1993(1): 45~49  
3 SD244-87 水文年鉴编印规范

(收稿日期: 1998-06-01 编辑: 马敏峰)