

编者按:边坡临界滑动场法是近年来发展起来的边坡稳定性计算新方法.在很多方面明显优于传统和其它计算方法,如它能准确快速确定边坡任意形状临界滑动面,全面评价边坡整体和局部稳定性等.边坡临界滑动场法已成功地用于实际边坡工程设计,取得良好的效果,值得在工程中特别是水利工程中推广应用.本刊从2000年第3期开始,以专题讲座的形式,分3次分别介绍边坡临界滑动场法的理论基础、数值模拟步骤以及工程应用.

## 边坡临界滑动场方法与应用(I)——理论基础

19  
63-66

朱大勇,姜弘道

TLU432

(河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

中图分类号:TU43

文献标识码:E

文章编号:1006-7647(2000)03-0063-04

### 1 引言

极限平衡条分法是边坡稳定性分析最基本和最主要的方法.对于给定滑面,以各种假设条件为基础的条分法能够给出合理的边坡稳定性系数即安全系数<sup>[1,2]</sup>,而至今没有很好解决的重要问题是如何确定安全系数最小的临界滑动面,特别是滑面为任意形状.

目前任意形状临界滑动面确定的方法大致分为4类:变分法<sup>[3]</sup>、动态规划法<sup>[4]</sup>、非线性规划法<sup>[5,6]</sup>及随机搜索法<sup>[7,8]</sup>.这些方法不乏有成功的例子,但还没有从根本上解决求解普适性、收敛性等问题.作者近年来发展了一种新的边坡稳定性计算方法——临界滑动场法(简称CSF法)<sup>[9-12]</sup>,CSF法十分方便、准确地确定(而不是搜索)边坡任意形状全局最优的临界滑动面及其它次临界滑动面,全面评价边坡整体和局部稳定性.CSF法已成功地应用于大型露天矿边坡设计,取得良好效果.本讲座分3个部分分别介绍CSF法的理论基础、数值模拟与工程应用.本文为第一部分即理论基础.

### 2 改进的条分法计算格式

边坡临界滑动场方法是在极限平衡条分法基础上发展起来的稳定性计算方法.对于计算预先给定的任意形状滑动面安全系数,现行条分法理论已相当成熟,但由于各自假设条件不一致,计算格式缺乏统一性.作者近期对条分法作些改进<sup>[12]</sup>,可以统一考虑不

同的假设方式,建立了简单明了的递推形式计算格式,计算精度与效率大为提高,也便于编制计算程序.改进后的条分法已成为CSF法的重要理论基础之一.

如图1(a)所示,滑体划分为 $n$ 个垂直条块,假设条间作用力方向倾角 $\theta$ 在滑体内呈某种函数形式分布.不同的方法有不同的假设,基于力平衡的条分法假定 $\theta$ 分布是固定的,如简化Janbu法、余推力法等;基于力与力矩平衡条分法即所谓严格法假定 $\theta$ 分布含有1个待定参数,如Morgenstern-Price法<sup>[1]</sup>建议: $\tan\theta = \lambda f(x')$ , $x'$ 为线性归一化后滑体水平方向坐标;作者建议, $f(x) = \sin^\mu(\pi x')$ , $\mu$ 为非负的形状系数,可取0~3.

选取典型条块 $k$ 作分析对象,如图1(b)所示,作用于条块 $k$ 上的力有:体力 $W_k$ ;地震力 $K_c W_k$ , $K_c$ 为地震影响系数;坡面外力 $Q_k$ ;条间作用力 $P_{k-1}$ , $P_k$ ;条底水压力合力 $U_k$ ;条底有效正应力合力 $N_k'$ ;条底抗剪力 $T_k = N_k' \tan\varphi_k^m + c_k^m l_k$ , $\varphi_k^m$ 和 $c_k^m$ 分别为极限平衡状态时调用的内摩擦角和凝聚力, $\varphi_k^m = \arctan[\tan(\varphi_k/F_s)]$ , $c_k^m = c_k/F_s$ , $\varphi_k$ 和 $c_k$ 为原始强度指标, $F_s$ 为安全系数.由于所取条块数很多,可以认为 $W_k$ , $U_k$ , $N_k'$ 作用点位于条块竖直中线上.

根据条块受力平衡建立条间力 $P_k$ 、条间力矩 $M_k(= P_k \cos\theta_k Z_k)$ 的递推关系式:

$$P_k = \frac{1}{\cos(\alpha_k - \theta_k - \varphi_k^m)} [\cos(\alpha_k - \theta_{k-1} - \varphi_k^m) P_{k-1} + \sin(\alpha_k - \varphi_k^m) W_k + \cos(\alpha_k - \varphi_k^m) K_c W_k +$$

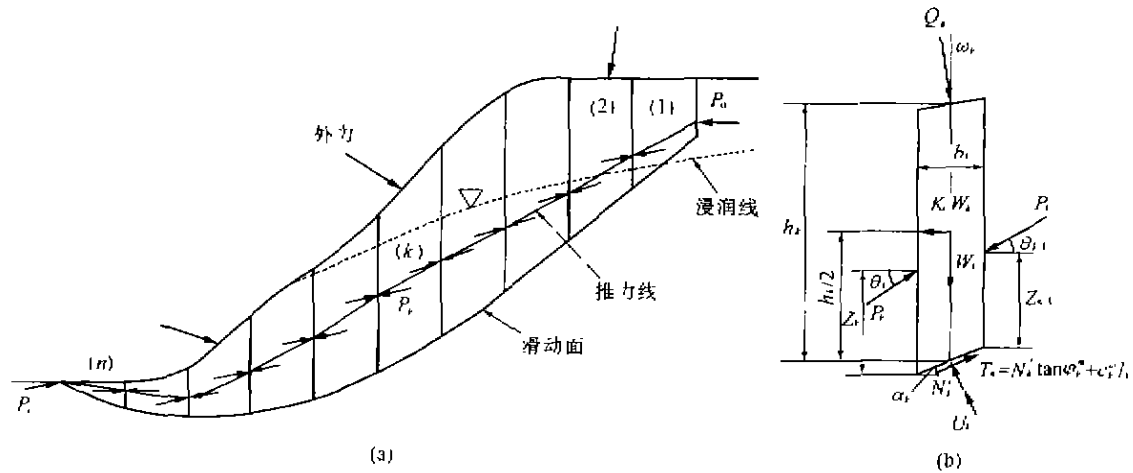


图1 边坡体分块及条块受力分析

$$\sin(\alpha_k - \omega_k - \varphi_k^m) Q_k + \sin \varphi_k^m U_k - c_k^m l_k \cos \varphi_k^m \quad (1)$$

$$M_k = M_{k-1} + \frac{b_k}{2 \cos \alpha_k} [\sin(\alpha_k - \theta_k) P_k + \sin(\alpha_k - \theta_{k-1}) P_{k-1}] + K_c W_k \frac{h_k}{2} - Q_k \sin \omega_k h_k \quad (2)$$

基于力平衡的条分法只需式(1), 严格法安全系数的求解可归结为解二元非线性方程组:

$$P_n(F_s, \lambda) = 0, \quad M_n(F_s, \lambda) = 0 \quad (3)$$

安全系数  $F_s$  与待定参数  $\lambda$  均隐含在方程组(3)中, 可采用 Newton-Raphson 法迭代求解<sup>[12]</sup>. 如第  $i$  步值为  $F_s^{(i)}$ ,  $\lambda^{(i)}$  (初始值可假定), 则第  $i+1$  步值  $F_s^{(i+1)}$ ,  $\lambda^{(i+1)}$  改进为

$$F_s^{(i+1)} = F_s^{(i)} + \Delta F_s, \quad \lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} + \Delta \lambda \quad (4)$$

$$\Delta F_s = \frac{P_n \frac{\partial M_n}{\partial \lambda} - M_n \frac{\partial P_n}{\partial \lambda}}{\frac{\partial P_n}{\partial \lambda} \frac{\partial M_n}{\partial F_s} - \frac{\partial P_n}{\partial F_s} \frac{\partial P_n}{\partial \lambda}} \quad (5a)$$

$$\Delta \lambda = \frac{-P_n \frac{\partial M_n}{\partial F_s} + M_n \frac{\partial P_n}{\partial F_s}}{\frac{\partial P_n}{\partial \lambda} \frac{\partial M_n}{\partial F_s} - \frac{\partial P_n}{\partial F_s} \frac{\partial P_n}{\partial \lambda}} \quad (5b)$$

上式中的有关偏导数可表示为递推形式的解析代数方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_k}{\partial F_s} &= \frac{\cos(\alpha_k - \theta_{k-1} - \varphi_k^m)}{\cos(\alpha_k - \theta_k - \varphi_k^m)} \frac{\partial P_{k-1}}{\partial F_s} + \\ &\frac{\sin 2 \varphi_k^m}{2 F_s} \tan(\alpha_k - \theta_k - \varphi_k^m) P_k - \\ &\frac{\sin 2 \varphi_k^m \sin(\alpha_k - \theta_{k-1} - \varphi_k^m)}{2 F_s \cos(\alpha_k - \theta_k - \varphi_k^m)} P_{k-1} + \\ &\frac{\sin 2 \varphi_k^m}{2 F_s \cos(\alpha_k - \theta_k - \varphi_k^m)} [\cos(\alpha_k - \varphi_k^m) W_k - \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha_k - \varphi_k^m) K_c W_k + \cos(\alpha_k - \omega_k - \varphi_k^m) Q_k - \cos \varphi_k^m \cdot U_k + \cos \varphi_k^m \cot \varphi_k^m \cdot c_k^m \cdot l_k] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_k}{\partial \lambda} &= \frac{\cos(\alpha_k - \theta_{k-1} - \varphi_k^m)}{\cos(\alpha_k - \theta_k - \varphi_k^m)} \frac{\partial P_{k-1}}{\partial \lambda} - \\ &\tan(\alpha_k - \theta_k - \varphi_k^m) \cos^2 \theta_{k-1} \cdot f_k P_k + \\ &\frac{\sin(\alpha_k - \theta_{k-1} - \varphi_k^m) \cos^2 \theta_{k-1} \cdot f_{k-1}}{\cos(\alpha_k - \theta_k - \varphi_k^m)} P_{k-1} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_k}{\partial F_s} &= \frac{\partial M_{k-1}}{\partial F_s} + \frac{b_k \sin(\alpha_k - \theta_k)}{2 \cos \alpha_k} \frac{\partial P_k}{\partial F_s} + \\ &\frac{b_k \sin(\alpha_k - \theta_{k-1})}{2 \cos \alpha_k} \frac{\partial P_{k-1}}{\partial F_s} \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_k}{\partial \lambda} &= \frac{\partial M_{k-1}}{\partial \lambda} + \frac{b_k \sin(\alpha_k - \theta_k)}{2 \cos \alpha_k} \frac{\partial P_k}{\partial \lambda} + \\ &\frac{b_k \sin(\alpha_k - \theta_{k-1})}{2 \cos \alpha_k} \frac{\partial P_{k-1}}{\partial \lambda} - \\ &\frac{b_k \cos(\alpha_k - \theta_k) \cos^2 \theta_k \cdot f_k}{2 \cos \alpha_k} \cdot P_k + \\ &\frac{b_k \cos(\alpha_k - \theta_{k-1}) \cos^2 \theta_{k-1} \cdot f_{k-1}}{2 \cos \alpha_k} P_{k-1} \quad (9) \end{aligned}$$

### 3 边坡临界滑动场的推断与定义

设边坡滑动面由广义坐标变量  $x_1, x_2, \dots, x_m$  控制, 滑面的安全系数  $F_s$  也视为一个变量. 求最小安全系数的问题可归结为最优化问题(本文暂不考虑滑体的力矩平衡, 有关基于严格法的 CSF 请参阅即将刊出的本讲座第2部分):

$$\min G(F_s, x_1, x_2, \dots, x_m) = F_s \quad (10)$$

$$\text{s.t. } P_n(F_s, x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \quad (11)$$

其中  $G$  为目标函数,  $P_n$  为剩余推力,  $G$  是个特殊的目标函数, 它是变量  $F_s$  的本身;  $P_n$  一般不能用数学式表达, 式(11)只是一种蕴含关系. 上述问题是含等

式约束的非线性规划问题,引入 Lagrange 函数

$$L(F_s, x_1, x_2, \dots, x_m, \eta) = F_s + \eta P_n(F_s, x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (12)$$

目标函数  $G$  极值的必要条件为

$$1 + \eta \frac{\partial P_n}{\partial F_s} = 0 \quad (13)$$

$$P_n = 0 \quad (14)$$

$$\eta \frac{\partial P_n}{\partial x_1} = 0, \eta \frac{\partial P_n}{\partial x_2} = 0, \dots, \eta \frac{\partial P_n}{\partial x_m} = 0 \quad (15)$$

只要条间力方向与条块底面倾角组合在合理范围内,  $P_n$  始终随  $F_s$  增加而单调增加( $F_s$  的增加意味着边坡体调用强度的降低,从物理直观上看显然出口处剩余推力应增大),因此,  $\frac{\partial P_n}{\partial F_s} > 0, \eta < 0$ , 由式(15)知,  $P_n$  相对于坐标变量取驻值,即

$$\frac{\partial P_n}{\partial x_1} = \frac{\partial P_n}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial P_n}{\partial x_m} = 0 \quad (16)$$

在边坡问题中,  $P_n$  也只具有极大值,因此  $F_s$  最小化问题可转化为  $P_n$  最大化问题(约束条件为  $P_n = 0$ ). 也就是说,确定安全系数最小的临界滑动面问题等价于确定剩余推力最大且为零的滑动面。

设边坡安全系数为  $F_s$ , 边坡体所有土层强度指标按同一比例折算,对于边坡面上某一点,存在一条以此点为出口的滑动面使其剩余推力  $P_n$  达到极大值,此面称为该出口对应于安全系数  $F_s$  的危险滑动面。边坡面上众多出口的危险滑动面便构成一个场,这个场定义为危险滑动场(dangerous slip field,简称 DSF)。或者说,危险滑动场是一定安全系数意义下的一簇滑动面,这些滑动面的剩余推力相对于其出口而言是极大的,因而也称之为极大剩余推力。

总是存在这样的安全系数,某一个出口的极大剩余推力为零(该出口的危险滑动面达到极限平衡状态),而其它所有出口的极大剩余推力为负值,也就是说最大的极大剩余推力为零,这个安全系数便是边坡整体最小安全系数,极大剩余推力最大且为零的危险滑动面就是边坡临界滑动面,此时的危险滑动场定义为边坡临界滑动场(critical slip field,简称 CSF)。临界滑动场是包含有临界滑动面的危险滑动场,它的最大极大剩余推力为零。对于非临界出口,也可由上述方式确定危险滑动面使其剩余推力为零,得到相应局部临界滑动面及局部最小安全系数,所有局部临界滑动面与全局意义的临界滑动面一起组成边坡全局临界滑动场(global critical slip field,简称 GCSF)。DSF, CSF 和 GCSF 示意图见图 2。

#### 4 推力最大原理

下面对危险滑动场 DSF 中某个危险滑动面进

行考察。如图 3 所示,边坡体划分成许多垂直条块,  $ABCD$  是出口为  $A$  点的危险滑动面,滑动面在同一条块可近似认为是直线,但条块足够多时,这种折线型滑动面完全可以代替各种复杂形状的滑动面。滑体在出口  $A$  点的剩余推力为  $P_A$ 。由于  $ABCD$  为危险滑动面,  $P_A$  达到极大,也就是说,任何偏离于危险滑动面  $ABCD$  的滑动面(如图 3 中  $ABCD_1, ABCD_2$  或  $ABCD_3$ )产生的剩余推力不会大于  $P_A$ 。

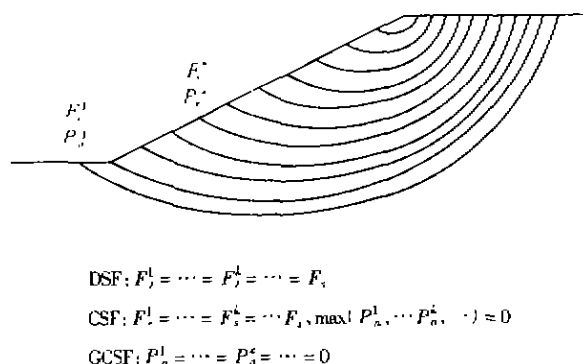


图 2 DSF, CSF, GCSF 示意图

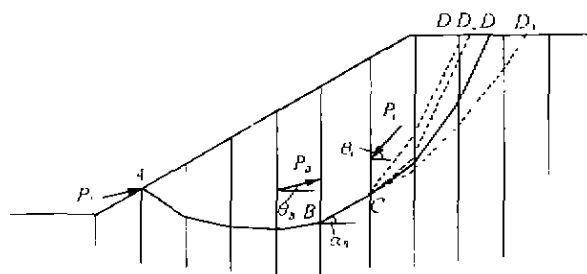


图 3 推力最大原理论证

选取危险滑动面上滑体的某一条块进行分析,该条块底面  $BC$  的倾角为  $\alpha_B$ , 条块两边所受的条间力分别为  $P_C$  和  $P_B$ , 其倾角分别为  $\theta_C$  与  $\theta_B$  (条间力倾角在现阶段讨论时假定是预先固定的), 条间力递推关系可表示成下面形式:

$$P_B = \frac{\cos(\alpha_B - \theta_C - \varphi_B^m)}{\cos(\alpha_B - \theta_B - \varphi_B^m)} P_C + G \quad (17)$$

其中  $\varphi_B^m$  为滑动面  $BC$  所调用的内摩擦角,  $G$  只与本条块的几何尺寸及其上作用的外力有关。

假设滑动面  $A$  点至  $B$  点固定不变,显然要使出口点  $A$  的剩余推力达到极大,条间力  $P_B$  必须达到最大。由条间力递推关系式(17),可知条块间推力  $P_B$  的大小只与本条块参数及上条块间推力  $P_C$  有关,而与除  $BC$  外滑动面其它部分的具体路径无关。因此,要使  $P_B$  达到最大,无论  $C$  点在什么位置,其相应条间推力  $P_C$  也应达到最大。这一性质我们归纳为推力最大原理,即:危险滑动面上滑体的任一条块间推力都尽可能达到最大。

危险滑动场 DSF 是由无数条危险滑动面组成

的,因此相对于场内任一点的条间力都应达到最大。推力最大原理还可引伸出下面的推论:

如果一个滑动面是危险滑动面(出口处剩余推力最大),则该面上任一点至坡顶部分的子滑动面也必构成危险滑动面(将此点作为子滑动面的出口,其剩余推力也必最大)。

上述推力最大原理及其推论是通过分析条间力递推关系从力学直观上论证得出的,有趣的是,它们在数学上与动态规划中的最优性原理<sup>[13]</sup>完全一致。

## 5 结 语

对传统的极限平衡条分法进行了改进,建立了条间力与条间力矩的递推关系式,并给出高精度高效计算安全系数的解析代数格式。通过数学论证与物理直觉推断定义了边坡危险滑动场 DSF、临界滑动场 CSF 及全局临界滑动场 GCSF。从条间力递推关系出发论证了推力最大原理,并发现它与最优性原理的等价关系。本文内容将成为边坡临界滑动场数值模拟的理论基础。

### 参考文献:

- [1] 钱家欢,殷宗泽.土工原理与计算[M].第2版.北京:中国水利水电出版社,1996.
- [2] Duncan J M. State of the art: limit equilibrium and finite-

element analysis of slopes[J]. J of Geotechnical Engineering, 1996, 122(7):577~596.

- [3] Castillo E, Revilla J. The calculus of variations and the stability of slopes [A]. Proc 9th Int Conf on Soil Mechanics and Foundation Engrg[C], Vol. 2, 1977, 25~30.
- [4] Baker R. Determination of the critical slip surface in slope stability computations[J]. Int J Numer and Analytical Methods in Geomech, 1980(4): 333~359.
- [5] Celestino T B, Duncan J M. Simplified search for noncircular slip surfaces[A]. Proc of the 10th Int Conf on Soil Mech and Foundation Engrg[C], Stockholm, 3, 1981, 391~394.
- [6] Chen Z Y, Shao C M. Evaluation of minimum factor of safety in slope stability analysis[J]. Can Geotech J, 1988, 25: 735~748.
- [7] Greco V R. Efficient Monte-Carlo technique for locating critical slip surface[J]. Can Geotech J, 1994, 122(7):517~525.
- [8] Chen Z Y. Random trials used in determining global minimum factors of safety of slopes[J]. Can Geotech J, 1992, 29:225~233.
- [9] 朱大勇.边坡临界滑动场及其数值模拟[J].岩土工程学报,1997,19(1):63~69.
- [10] 朱大勇,钱七虎,周早生.岩体边坡临界滑动场及在露天矿边坡设计中的应用[J].岩石力学与工程学报,1999(5):567~572.
- [11] 朱大勇,钱七虎,周早生.基于余推力法的边坡临界滑动场[J].岩石力学与工程学报,1999(6):667~670.
- [12] 朱大勇.土体稳定性分析方法—临界滑动场法[D].南京:南京工程兵工程学院,1999.
- [13] 甘应爱等.运筹学[M].北京:清华大学出版社,1990.

(收稿日期:1999-11-16 编辑:熊水斌)

(上接第35页)

为物理量等,对原始观测数据进行误差处理,并根据需要转换为物理量,然后进行整编并输入整编数据库;③应用方法库中的各种建模程序,计算监测量对应的模型预报值,并将监测量及相应的计算量输入,生成数据库。

输出子系统可以在在线实时分析和在线反馈分析过程中,任意显示输出或打印输出所有分析成果,包括相应的图表。

## 4 系统运行效果

系统从1993年开始进行部分研究工作,1996年5月正式全面启动系统的开发工作,并于1998年12月在二滩水电站总装,随即投入试运行。二滩拱坝的安全监测系统包括变形控制网、垂线坐标仪、引张线、多点变位计、伸缩仪、测缝计、静力水准仪、倾斜仪、倾角计、渗压计、渗流量计、应变计、无应力计、钢筋计、锚索测力计、水位计、水质分析仪等各类监测仪器,共1000多个测点,除变形控制网等少数监测点以外,其余均已接入自动化数据采集系统2380MCU,并由本系统控制监测、采集数据,同时自

动进行监测量和物理量的转换。运行人员利用本系统进行监测资料的分析和处理,并打印报表。在这几个月的运行中,系统未出现过软件故障,且基本上满足了运行人员监控和管理的需要,极大地提高了资料分析的速度,提高了二滩拱坝的安全监测水平。

## 5 结 语

二滩拱坝安全监测在线监控系统是一个庞大的系统工程。该系统可以快速分析和评价二滩拱坝的运行状况,是保证二滩拱坝安全,并使其充分发挥工程效益的重要措施。它的开发和投入运行提高了二滩拱坝的安全监测水平。同时,该系统对优化设计、施工和运行,以及进一步完善坝工设计计算的理论和方法,补充现行的设计和施工规范也起到了一定的作用。因此,该系统的设计思想具有一定的推广应用价值。

### 参考文献:

- [1] 吴中如,沈长松,阮焕祥.水工建筑物安全监控理论及其应用[M].南京:河海大学出版社,1990.
- [2] 吴中如,顾冲时.大坝安全综合评价专家系统[M].北京:北京科学技术出版社,1997.

(收稿日期:1999-01-06 编辑:张志琴)