

有限元法前处理技术的发展

何发祥, 刘浩吾

(四川大学水利系, 四川 成都 610065)

TU311.4

TP391.75

摘要:论述有限元前处理技术的发展过程和主要方法,并以行波法生成三角形单元和合成法生成四边形单元的主要过程为例,系统地阐述有限元网格自动生成过程的一般步骤,网格优化及单元质量评价方法,并展望有限元前处理技术的发展趋势。分析表明,合成法生成四边形单元具有单元质量好,边界适应性强,适于自动生成等优点。

关键词:有限元;前处理;网格生成

中图分类号:TP391.75;TU311.4

文献标识码:A

文章编号:1006-7647(2000)06-0015-04

有限单元法作为一种极为有效的数值分析方法,广泛地应用于土木、机械、流体、渗流、热传导等诸多领域。以前,由于计算机速度慢,计算成本高,有限元中分析域的离散和数据准备均以人工方式进行。随着计算机技术的进步,大规模、高精度已成为现代有限元技术的新趋势,人工离散化工作已不再适应这种发展。因此前处理技术是影响有限元技术实际应用的关键。

1 单元生成法分类

前处理技术伴随着有限元技术的发展而发展。最早的有限元网格自动剖分出现于70年代初^[1]。首先在待解子域中随机生成节点,将其连接起来形成三角形单元。用 Delaunay 算法^[2]可获得性能优良、形状最佳的三角形单元。因而颇受欢迎,成为三角形单元自动剖分的主要方法。

映射法也是早期出现的较优秀的方法,如保角映射法^[3]、拉普拉斯映射法^[4]、等参映射法^[5]、超限映射法^[6]和近几年在国内出现的模板法^[7]。映射法需要准备大量的数据,只能算是半自动方法,但由于概念明确、方法简单、单元性能较好,对规则均一的区域,适用性很强(如图1),所以得到了较大的发展,并一度成为商用软件的主要方法。

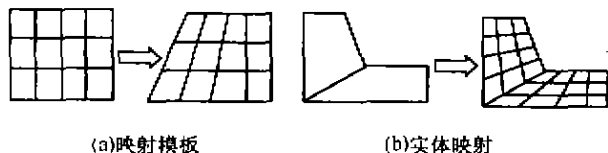


图1 映射法

此外,还有递归分解法^[8](又称拓扑分解法)、四分法^[9]、Paving 法^[10]和前沿(front)法^[11],以及由前沿法改进而形成的行波(advancing front)法^[12]等均能生成质量较高的单元。

三角形单元精度比四边形单元低但对边界的适应性强,应用广泛。在四边形单元生成法中,除了映射法、四分法和 Paving 法外,合成法^[12]生成的四边形单元具有较高的质量。

90年代后,出现了自适应有限元技术^[13]。程序根据控制误差的需要,自动进行网格的优化和细化,提高计算精度。这是目前有限元技术的最前沿课题之一。自适应技术的关键在于有限元计算的误差估算。最近几年中,关于误差估算有大量的文献出现,如关于线弹性问题^[14]、高速水流问题^[15]、Navier-Stokes 方程^[16]、Helmholtz 方程^[17]、摩擦接触问题^[18]等都有专门的算法。

表1是一些常用方法的特点和性能的比较分析(表中 N 为网格节点数)。

表1 几种典型网格生成算法对比

分类方法	三角形	四边形	单元 形态	密度 控制	自动 程度	时间 复杂度
Delaunay 法	✓	✗	好	好	高	$O(N)$
映射法	✓	✓	好	差	低	$O(N)$
拓扑分解法	✓	✗	差	差	一般	$O(N^2)$
四分法	✓	✓	内部好	好	高	$O(N^2)$
Paving 法	✓	✓	好	一般	一般	$O(N)$
前沿法	✓	✓	一般	一般	高	$O(N)$
行波法	✓	✓	好	好	高	$O(N)$
合成法		✓	好	好	高	$O(N)$

2 网格自动生成法概述

通常,网格自动生成过程分数据准备和自动剖分两步进行。

2.1 数据准备

任何一种生成法,其初始数据总是由人工准备的,其质量直接影响到单元质量。数据准备一般包括以下几个方面:

a. 子域的分解。由于有限元法所处理的目标域具有一定的复杂性和不规则性,很难有一种生成方法可以覆盖整个区域。通常把待处理域按一定条件如材料介质分区、网格密度分布、边界条件等进行分区(图2),然后对这些子区域(也叫超单元)逐个进行自动剖分,并将其连接起来形成完整的剖分,因此子域化一般都是自动剖分的第一步。

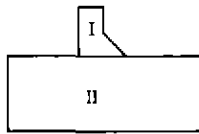


图2 区域分解

b. 边界描述。这是对待解区域的几何特征、连通情况、边界约束情况、材料介质分区、荷载条件及网格密度分布等边界情况进行描述,即进行边界离散。离散后的节点数目和节点位置要能用样条函数精确地表达其几何特征。

c. 多连通处理。若待解域是一个单连通域,则边界由一个封闭环组成。情况复杂时存在多连通域,这可有两种方法处理。一是对每个内部开口单独进行描述。另一种方法是用线段将其与最近的子域边界连接起来从而形成封闭的单连通域(图3)。

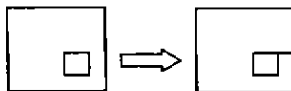


图3 多连通处理

d. 背景网格。为便于控制单元的密度分布和走向,常使用背景网格。控制参数位于网格节点上,其内部各点参数则通过节点参数内插产生。背景网格一般采用三角形,它应包含全部待解域(如图4),在网格的各个顶点上主要设置单元密度函数 δ ,单元走向总是沿一个固定方向如沿逆时针方向。背景网格越密,控制性越强,单元性能也越好。

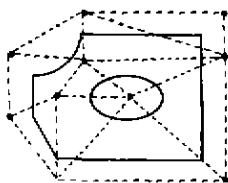


图4 背景网格

2.2 三角形网格生成法

三角形网格算法简单,生成容易,有较强的控制性,单元往往具有较好的形状和较强的边界适应性,因此颇受青睐,现在仍有很好的应用前景。下面主要概述行波法。

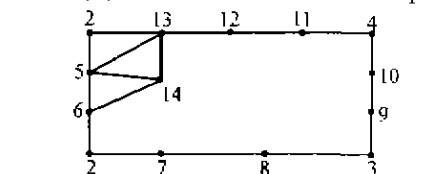
行波法是Parier等^[19]在Lo的前沿法^[11]基础上改进而成。其特点是采用节点和单元同时生成,即在产生一个新的节点时,也生成新的单元。

在生成单元之前,首先生成前沿(front)。初始前沿由一系列边界上的单元边(每一条边由两端节点描述)按逆时针顺序排列而成。这些边是按背景网格上的单元密度函数离散而成的,其顺序和节点编号均按逆时针方向。这些单元边总可以与另一个节点形成一个新的三角形,称这些边处于被激活(active)状态,其端节点也处于被激活的状态。

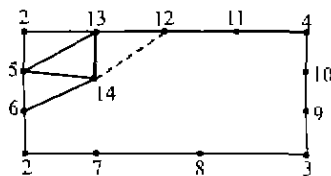
在单元剖分过程中,前沿的内容不断被更新。一旦前沿内的边不能再形成新的三角形,则被删除,而新生成的边若能形成另一个三角形,则被激活放进前沿内。这样,每生成一个新的三角形,前沿就会被更新一次(如图5),直到前沿为空。前沿法的控制算法如下:①从前沿中选取一条活动边作为新三角形的基边;②假设选定活动边 AB ,其中点为 M ,用内插法求出 M 的密度函数;③在 M 处作 AB 垂线,方向指向未分解域,求出线上一点 C ,使 $AC = BC = \delta_1$;

$$\delta_1 = \begin{cases} 0.55AB & \delta_M < 0.55AB \\ \delta_M & 0.55AB < \delta_M < 2AB \\ 2AB & \delta_M > 2AB \end{cases}$$

④以 C 点为圆心, nAB (n 视情况而定)为半径画圆,找出圆内所有活动节点,选取与 C 点最近的活动节点 N ;⑤用 C 点代替 N 除非: $NA < 1.5\delta_1$ 且 $NB <$



14	6	2	7	8	3	9	10	4	11	12	13
6	2	7	8	3	9	10	4	11	12	13	14



14	6	2	7	8	3	9	10	4	11	12	13
6	2	7	8	3	9	10	4	11	12	13	14

图5 前沿操作

1.5 δ_1 . 点 N (或 C) 就是新生成的节点.

最后按前述方法更新前沿,若前沿为空,则三角化过程结束.

2.3 四边形网格生成法

众所周知,四边形单元比三角形单元精度高.在现代工程计算中,常采用四边形单元.然而,直接生成四边形单元却不容易,因为其边界适应性较差.如映射法和四分法均能产生具有较好形状的单元,在规则区域单元的精度很高,但在复杂边界上均会产生畸形单元.

利用三角形单元对边界的适应性,将其转换成四边形单元可以有效地克服边界单元畸形.转换可有两种,一是将拥有一条公共边的两个三角形合为一个四边形,另一种是将一个孤立的三角形分解成三个四边形.第二种方法单元密度太大,并且节点难以控制.

一个四边形可以分为两个形状较好的三角形,反之,两个拥有一条公共边的三角形可以合成一个四边形(如图6),其边线及顶点固定,经过优化处理可以得到较好的形状和较高的精度.合成法生成四边形单元基于两个基本事实:①如果待分解域形成的多边形具有偶数边的话,该区域可以被完全分解成四边形单元;②拥有一条公共边的两个三角形总可以合成一个四边形.

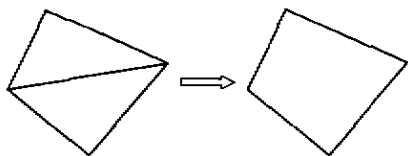


图6 合并法

用合成法生成四边形单元时数据的准备工作与前述相同,只要每一个子域在边界上的单元边数和节点数是偶数(这总是可以达到的),就可以使该域完全被分解成四边形单元.常用行波法生成四边形单元^[12].

在边界离散后形成初始前沿(F).前沿内的活动边数目与节点数目相同(当然也是偶数),并形成一个封闭环.前沿内的边和节点均被激活.

首先在分解域内生成两个拥有一条公共边的三角形,将其合并便形成一个四边形单元,然后更新前沿.主要步骤如下:①在前沿中选取活动边 AB 作为基边,用行波法生成第一个三角形 ABC , C 点可以是前沿中的一个活动节点,也可以是新生成的点;②如果 C 是前沿中的活动节点,则将前沿(F)分割成两个子前沿 SF_1 和 SF_2 (子前沿与初始前沿具有相同的性质),并检查三角形 ABC 的边的活动性;

③选取三角形 ABC 的一条活动边作为生成第二个三角形的基边并生成第二个三角形,并将其与第一个三角形合并生成一个四边形单元;④更新所有前沿,并选取一非空前沿重复前三步,直到所有前沿为空.

在生成一个四边形单元后,每一个前沿中的活动边和节点数目必须是偶数,并形成一个新的封闭环,这对生成全四边形网格非常重要.生成四边形单元的过程中,暂不考虑单元的形状,只要两个三角形拥有一条公共边,就可以合并形成一个四边形单元,这样四边形单元的生成与三角形单元的生成一样容易,宜于自动剖分.

2.4 网格优化

一般地,网格自动剖分器并不能立即产生形状十分合理的单元,故需进行网格优化.通常采用的是拉普拉斯光滑法^[12](Laplacian smoothing),这是一种有效的算法.但对于严重畸变的单元,光滑处理效果并不理想.为此,左旭等提出了基于 Jacobian 矩阵的优化算法^[20],并取得了较好的效果.

当生成过程完成后,网格的拓扑结构(如单元与节点的关系,单元与单元边的关系,节点与节点的关系等)也就形成了.这种拓扑结构在某种程度上反映了网格的规整性.例如,对四边形网格的内部节点,节点与单元的最佳状态是 NE (内节点周围的单元数目)等于4.但如果 NE 远大于或小于4,

$|NE - 4| \geq 2$ 时,则该节点周围的单元就严重畸变了.因此,使用单元修正技术改善单元质量是非常必要的.通常通过删除节点、单元边及一些特定的单元,调整相邻单元结构可以获得较好的效果^[12].

2.5 单元质量评价

单元形状的好坏标准一般以其内角评价.如果内角满足 $45^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$,则认为是比较满意的.如果内角不满足 $30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$,则认为单元质量不好或畸形,如果处于这两个标准之间则认为是可以接受的.

3 前处理技术存在的问题和发展趋势

由于计算速度不再是人们最担心的问题,减轻手工劳动和提高计算精度便成了当然的发展趋势.

a. 前处理将朝着多媒体化方向发展.计算机具有高效快速和完美的图形处理能力,有限元的前后处理由计算机自动完成并全过程可视化是当今有限元技术的标志之一,这在目前的一些商用软件中已得到实现.多媒体化将是有限元前处理技术利用现代计算机技术的新的发展趋势之一.

b. 前处理将朝着智能化方向发展.一是网格生成要体现人的意志,充分利用以往人工剖分经验和

要求,尽量实现理想的网格划分.另一方面,仿真计算技术要求前处理技术模拟工程技术中的各种问题,如施工过程、施工优化等,这必将导致前处理技术进一步发展.

c. 提高计算精度将是有限元技术发展的另一重大任务.在前处理技术中这包含两个方面的意义:①提高网格精度.网格精度直接影响到有限元计算精度.各种方法自动生成的网格单元受其边界条件制约较大.尽管可以通过单元光滑法和单元修正技术进行调整,但在复杂区域和复杂边界时这是有限的.因此如何进一步提高生成单元的精度仍是前处理课题之一.②自适应有限元技术.自适应算法中通过自动加密网格来提高计算精度.这种算法有效而且收敛快,在各个领域内自适应算法将会有较大的发展.其主要问题在于如何进行误差估算,这对于各个领域中的不同问题是不一样的.这也是目前有限元前处理技术发展的主要方向之一.

参考文献:

- [1] Frederick C O, Wong Y C, Edge F W. Two dimensional automatic mesh generation for structural analysis[J]. Int J Num Meth Eng, 1970(2): 133 ~ 144.
- [2] Cendes Z J, Shenton D, Shahnasser H. Magnetic field computation using Delaunay triangulation and complementary finite element methods[J]. IEEE Trans Mag 1983, 19(6): 2551 ~ 2557.
- [3] Barfield W D. Numerical method for generating orthogonal curvilinear meshes[J]. J Comp Phy, 1970(5): 23 ~ 33.
- [4] Buell W R, Bush B A. Mesh generation—A survey[J]. Trans ASME J Eng For Industry, 1973(2): 332 ~ 338.
- [5] Zienkiewicz O C, Phillips D V. An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by 'isoparametric' coordinates[J]. Int J Num Meth Eng, 1980, 15: 470 ~ 476.
- [6] Gordon W J, Hall C A. Construction of curvilinear co-coordinate systems and applications to mesh generation[J]. Int J Num Meth Eng, 1973(7): 461 ~ 477.
- [7] 李华,陈耿东,顾元宪.一种新的全四边形网格快速生成法——模板法[J].计算结构力学及其应用, 1996, 13(1): 26 ~ 33.
- [8] Sluiter M L C, Hansen D L. A general purpose two- and three-dimensional mesh generator[J]. Computing in Engineering, 1982(3): 29 ~ 34.
- [9] Yerry M A, Shephard M S. A modified quadtree approach to finite element mesh generation[J]. IEEE Comput Graph & Appl, 1983(2): 39 ~ 46.
- [10] Blacker T D, Stephensen M B. Paving: a new approach to automated quadrilateral mesh generation[J]. Int J Num Meth Eng, 1991, 32: 811 ~ 847.
- [11] Lo S H. A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains[J]. Int J Num Meth Eng, 1985, 21: 1403 ~ 1426.
- [12] Zhu J Z, Zienkiewicz O C, Wu J. A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation[J]. Int J Num Meth Eng, 1991, 32: 849 ~ 866.
- [13] Zienkiewicz O C, Zhu J Z. Adaptivity and mesh generation[J]. Int J Num Meth Eng, 1992, 32: 783 ~ 810.
- [14] Cirak F, Ramm E. A posteriori estimation and adaptivity for linear elasticity using the reciprocal theorem[J]. Comp Meth Appl Mech Eng, 1998, 156: 351 ~ 362.
- [15] Hassan O, Probert E J, Morgan K, Peraire J. Mesh generation and adaptivity for the solution of compressible viscous high speed flow[J]. Int J Numer Meth Eng, 1995, 38: 1123 ~ 1148.
- [16] Rachowicz W. An anisotropic h-adaptive finite element method for compressible Navier-Stokes equations[J]. Comp Meth Appl Mech Eng, 1997, 146: 231 ~ 252.
- [17] Stewart J R, Hughes T J R. H-Adaptive finite element computation of time-harmonic exterior acoustics problems in two dimensions[J]. Comp Meth Appl Mech Eng, 1997, 147: 65 ~ 89.
- [18] Wriggers P, Scherf O. Adaptive finite element techniques for frictional contact problems involving large elastic strain[J]. Comp Meth Appl Mech Eng, 1998, 151: 593 ~ 603.
- [19] Peraire J, Vahdati M, Morgan K, Zienkiewicz O C. Adaptive remeshing for compressible flow computations[J]. J Comp Phy, 1987, 72: 449 ~ 466.
- [20] 左旭,卫原平,陈军,阮雪榆.基于 Jacobian 矩阵的三维有限元网格质量优化[J].上海交通大学学报, 1998, 32(5): 142 ~ 144.

(收稿日期:1999-03-24 编辑:熊水斌)

• 简讯 •

山东泰山抽水蓄能电站动工

山东电网是我国目前最大的独立省网,全省电力装机已达 1824 万 kW,几乎全是火电.最大峰谷差高达 406 万 kW,调峰问题十分突出,迫切需要修建抽水蓄能电站以缓解山东电网的调峰矛盾.

泰山抽水蓄能电站位于泰山西南麓的泰安县城内,利用已建的大河水库加固改造作为下库,可得调节库容 2000 万 m^3 ,新建一座坝高为 98.3 m 的混凝土面板堆石坝作为上库,可得调节库容 890 万 m^3 ,利用水头约 220 m,装机 4 台共 100 万 kW,年电量 13.4 亿 kW·h,可为山东电网削峰填谷发挥重大作用.该电站动态投资 43.26 亿元,其中采用日本政府贷款 1.34 亿美元,其它由国家开发银行和商业银行贷款解决.该工程已于 2000 年 2 月在大河水库动工兴建,计划 2000 年首台机组投产运行.

(吴葵高供稿)