

接触问题有限元分析方法综述

孙林松¹, 王德信¹, 谢能刚²

(1. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 华东冶金学院机械工程系, 安徽 马鞍山 243000)

摘要:从直接迭代法、接触约束法和数学规划法等方面综述接触问题有限元分析的基本方法。直接迭代法是一种“试验-误差”方法, 概念清楚, 实施方便, 但计算工作量较大, 而且不能保证迭代一定收敛。接触约束法主要利用罚函数方法或 Lagrange 乘子法将接触问题转化为无约束问题求解。数学规划法利用接触问题的互补条件、非穿透条件等, 将其归结为二次规划(线性互补)问题求解, 这是一种非迭代类解法, 收敛平稳、迅速, 计算工作量较小。文末简单介绍接触问题研究的一些新趋势。

关键词:接触问题; 有限元; 迭代法; 接触约束法; 数学规划法

中图分类号: O343.3

文献标识码: A

文章编号: 1006-7647(2001)03-0018-03

接触问题广泛存在于机械工程、土木工程等领域, 如齿轮的啮合、坝体的接缝等。这类问题的特点是具有单边约束和未知接触区域, 接触区域的确定依赖于加载方式、荷载水平、接触面性质等因素, 属于边界待定问题。

接触问题的研究很早就引起了人们的重视。早在 1882 年, H. Herz 就比较系统地研究了弹性体的接触问题, 并提出经典的 Herz 接触理论。随着数值解法的兴起和发展, 出现了许多求解接触问题的非经典方法, 有限单元法作为解决复杂工程问题的最有效的数值方法, 也成为求解接触问题的一种主要方法。以有限元为基础的接触问题数值解法, 主要分为直接迭代法、接触约束算法和数学规划法等。

1 直接迭代法

迭代法是解决非线性问题的常用方法, 它在接触问题的研究中也首先得到了应用。在用有限元位移法求解接触问题时, 首先假设初始接触状态形成系统刚度矩阵, 求得位移和接触力后, 根据接触条件不断修改接触状态, 重新形成刚度矩阵求解, 反复迭代直至收敛^[1]。在上述方法中, 每次迭代都要重新形成刚度矩阵, 求解控制方程, 而实际上接触问题的非线性主要反映在接触边界上, 因此, 通常采用静力凝聚技术, 使得每次迭代只是对接触点进行, 大大提高了求解效率。另外, 还有所谓虚力法^[2], 用沿边界的虚拟等效压力来模拟接触状态, 这样在每次迭代中并不重新形成刚度矩阵, 所做的只是回代工作。

有限元混合法在弹性接触问题的求解中也得到较广泛的应用。它以结点位移和接触力为未知量, 并采用有限元形函数插值, 将接触区域的位移约束条件和接触力约束条件均反映到刚度矩阵中去, 构成有限元混合法控制方程^[3]

$$\begin{bmatrix} K & J \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中, K, u, f 分别为通常有限元位移法中的刚度矩阵、未知结点位移向量和结点荷载向量; J, L, c 分别为接触力约束矩阵、位移约束矩阵和接触力向量。

由于求解式(1)中非对称方程组将多耗机时、多占内存, 不少学者在对称化算法上进行了研究^[4]。

对弹塑性接触问题, 在求解过程中接触非线性和材料非线性都需要迭代求解。通常是利用系统刚度矩阵的变化来反映材料非线性的影响, 在每次塑性修正迭代过程中都要结合对接触状态的判断进行接触迭代计算。拟弹性叠加双重迭代法^[5]模拟弹性叠加原理建立有限元方程, 再利用内外循环迭代求出方程的近似解, 在整个计算过程中不改变接触体刚度阵, 仅增加平衡力修正项, 在一定程度上提高了计算效率。

在用迭代法求解接触问题, 尤其是有摩擦接触问题时, 为了保证收敛到正确的结果, 荷载增量往往要受到一定的限制^[6]。对弹塑性接触问题, 荷载增量更是受到不允许在一个增量步中出现两种非线性的限制^[7]。

2 接触约束算法

接触问题可描述为求区域内位移场 U , 使得系

作者简介: 孙林松(1968—), 男, 江苏姜堰人, 博士研究生, 从事结构分析与优化设计研究。

统的势能 $\Pi(U)$ 在接触边界条件的约束下达到最小,即

$$\min \Pi(U) = \frac{1}{2} U^T K U - U^T F \quad (2)$$

s. t. $g \geq 0$

接触约束算法就是通过对接触边界约束条件的适当处理,将式(2)所示的约束优化问题转化为无约束优化问题求解.根据无约束优化方法的不同,主要可分为罚函数方法和 Lagrange 乘子法等.

2.1 罚函数方法

罚函数方法实际上是将接触非线性问题转化为材料非线性问题.根据处理方法不同又可分为障碍函数法和惩罚函数法.障碍函数法假设接触面之间充满某虚拟物质,在未接触时其刚度趋于零,不影响物体的自由运动,在接触区域其刚度变得足够大,能阻止接触物体的相互嵌入.常用的间隙元等方法均属于此类,它们处理简单,编程方便,只是在通常的有限元分析中增加一种单元模式而已.惩罚函数法对接触约束条件的处理是通过在势能泛函中增加一个惩罚势能^[8]

$$\Pi_p = \frac{1}{2} P^T E_p P \quad (3)$$

式中: E_p 是惩罚因子; P 为嵌入深度,是结点位移 U 的函数.

这样,接触问题就等价于无约束优化问题

$$\min \Pi^*(U) = \Pi(U) + \Pi_p(U) \quad (4)$$

以位移 U 为未知量,系统控制方程为

$$(K + K_p)U = F - F_p \quad (5)$$

其中, $K_p = (\frac{\partial P}{\partial U})^T E_p \frac{\partial P}{\partial U}$, $F_p = (\frac{\partial P}{\partial U})^T E_p P_0$.

罚函数方法不增加系统的求解规模,但由于人为假设了很大的罚因子,可能引起方程的病态.

2.2 Lagrange 乘子法与增广 Lagrange 乘子法

Lagrange 乘子法通过引入乘子 λ ,定义接触势能

$$\Pi_c = g^T \lambda \quad (6)$$

将式(2)的约束最小化问题转化为无约束最小化问题

$$\min \Pi^*(U, \lambda) = \frac{1}{2} U^T K U - U^T F + g^T \lambda \quad (7)$$

通常,可将 $g(U)$ 对位移场 U 作 Taylor 展开,取其一次项有

$$g(U) \approx g_0 + \frac{\partial g}{\partial U} U = g_0 + G U \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)后,可得以位移场 U 和 Lagrange 乘子 λ 为基本未知量的系统控制方程

$$\begin{bmatrix} K & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -g_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Lagrange 乘子法中接触约束条件可以精确满

足,但由于 Lagrange 乘子的引入,系统的求解规模增大了,而且在控制矩阵中出现了零主元,必须采取适当的方法以保证方程的顺利求解.

由于罚函数方法和 Lagrange 乘子法各有优缺点,人们自然就想到了两者的联合使用,从而形成了各种增广 Lagrange 乘子法.其中,最直接的一种方法是构造修正的势能泛函

$$\Pi^* = \Pi + \Pi_p + \Pi_c \quad (10)$$

相应的控制方程为

$$\begin{bmatrix} K + K_p & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - F_p \\ -g_0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

考虑到 Lagrange 乘子的物理意义,可将其用接触点对的接触应力代替,通过迭代计算得到问题的正确解^[9].在迭代过程中,接触应力作为已知量出现,这样既吸收了罚函数方法和 Lagrange 乘子法的优点,又不增加系统的求解规模,而且收敛速度也比较快.

另一种增广 Lagrange 乘子法主要是为了弥补 Lagrange 乘子法中控制矩阵存在零主元的弱点,它在修正势能泛函式(7)中增加一惩罚项^[10]:

$$\Pi_c = -\frac{1}{2} \lambda^T E_p^{-1} \lambda \quad (12)$$

即 $\min \Pi^*(U, \lambda) = \frac{1}{2} U^T K U - U^T F +$

$$g^T \lambda - \frac{1}{2} \lambda^T E_p^{-1} \lambda \quad (13)$$

当罚因子 $E_p \rightarrow \infty$ 时,式(13)的解收敛于式(7)的解.经适当的运算后,可将系统的控制方程写为

$$(K + G^T E_p G) U = F - G^T E_p g_0 \quad (14)$$

3 数学规划法

接触问题的数学规划法是基于势能或余能原理,利用变分不等式等现代数学方法导出的,理论上比较严格和直观.最初该方法是针对无摩擦接触问题提出的^[11],它利用了无摩擦接触问题的非穿透条件和互补条件

$$\Delta u_n + \delta^* \geq 0, \quad p_n \leq 0 \quad (15)$$

$$p_n(\Delta u_n + \delta^*) = 0 \quad (16)$$

经有限元离散后,无摩擦接触问题被归结为二次规划(线性互补)问题求解.

数学规划法解有摩擦接触问题的关键在于将摩擦条件表示成互补形式.一种方法是利用凸分析理论,把摩擦条件可以写成如下带导数的互补形式^[12]

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_T &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial p_T} \\ \varphi &\leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \\ \varphi \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

对摩擦条件的另一种处理方法是引进惩罚因子,然后仿照塑性力学将摩擦接触条件表示成有惩罚因子的互补形式

$$\left. \begin{aligned} p_T &= E_T \left(u_T - \frac{\partial g}{\partial p_T} \lambda \right) \\ \varphi + \nu &= 0 \\ \nu \lambda &= 0, \quad \nu \geq 0, \quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中: $\varphi = |p_T| + \mu p_N$, 称为滑动函数; g 是相应的滑动势函数; λ 为滑动因子, E_T 是惩罚因子。

有了上述摩擦接触条件的互补关系,就可以利用参变量变分原理^[13]或虚功原理^[14]建立摩擦接触问题的有限元二次规划(线性互补)模型。对这类线性互补问题常采用 Lemke 算法求解。

对三维摩擦接触问题,为了能利用线性互补方法求解,通常以多面体棱锥近似代替 Coulomb 圆锥^[15],从而实现滑动函数的线性化。但该方法大大增加了问题的求解规模。为了尽量减少线性化所增加的求解规模,有的学者又提出了参数二次规划迭代算法^[16]、序列线性互补方法^[17]等。然而,三维摩擦接触问题本质上属于非线性互补问题,由此出发可以建立非线性互补-接触力法模型和非线性互补-接触位移法模型^[18]。

数学规划方法在弹塑性接触问题的应用,通常用迭代法反映材料非线性特征,在每次迭代中用数学规划方法求解接触问题^[19]。然而,钟万勰等^[20]利用参变量变分原理将接触问题和弹塑性问题表示成具有相同形式的有限元参数二次规划问题,很方便地实现了弹塑性接触问题的数学规划解法。

4 结 语

经过众多学者的不懈努力,接触问题的研究借助于有限单元法这一有效的数值分析方法已经取得了很大的进展。然而随着研究的深入及新的数学理论的引进,仍然不断有新的方法涌现,如自适应有限元技术^[21]、启发式算法^[22]等。另一方面,在接触问题算法研究的同时,人们也注意到了对摩擦现象和接触面本构模型的研究,如文献[23]研究了三维正交异性摩擦接触模型,文献[24,25]则分别讨论了接触面的随机模型和微观滑动(micro-slip)本构模型。

总之,接触问题的研究还远没有结束,它仍将是今后广大力学工作者和机械工程、土木工程领域学者的主要研究课题之一。

参考文献:

[1] Rahman M U, et al. An iterative procedure for finite-element stress analysis of frictional contact problems [J]. Comput

Struct, 1984, 18: 947 ~ 954.

- [2] Ayari M L, Saouma V E. Static and dynamic contact/impact problems using fictitious forces[J]. Int J Numer Meth Engng, 1991, 32: 623 ~ 643.
- [3] Bathe K J, Chaudhary A. A solution method for planar and axisymmetric contact problems[J]. Int J Numer Meth Engng, 1985, 21: 65 ~ 88.
- [4] Pascoe S K, Mottershead J E. Two new finite element method contact algorithms. Comput Struct, 1989, 32: 137 ~ 144.
- [5] 陈曼琪. 用拟弹性叠加双重迭代法解弹塑性接触问题[J]. 固体力学学报, 1983(3): 365 ~ 374.
- [6] Garrido J A, Foces A, Paris F. An incremental procedure for three-dimensional contact problems with friction[J]. Comput Struct, 1994(2): 201 ~ 215.
- [7] 张汝清, 詹先义. 非线性有限元分析[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1988. 200 ~ 203.
- [8] Underhill W R L, Dokainis M A, Oravas G E. A method for contact problems using virtual elements[J]. Comput Meth Appl Mech Engng, 1997, 143: 229 ~ 247.
- [9] 王水林, 邓建辉, 葛修润. 改进的拉氏乘子法在接触摩擦问题中的应用[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(5): 64 ~ 67.
- [10] Simo J C, Wrigger P, Taylor R L. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems [J]. Comput Meth Appl Mech Engng, 1985, 50: 163 ~ 180.
- [11] Haug D, Saxce G. Frictionless contact of elastic bodies by finite element method and mathematical programming technique. Comput Struct, 1980, 11: 55 ~ 67.
- [12] Klarbring A. General contact boundary conditions and the analysis of frictional systems[J]. Int J Solids Struct, 1986, 22: 1377 ~ 1398.
- [13] 钟万勰. 弹性接触问题的变分原理及参数二次规划求解[J]. 计算结构力学及其应用, 1985, 2(2): 1 ~ 10.
- [14] 朱昌铭. 基于虚功原理的弹性接触问题的线性互补方法[J]. 力学学报, 1995, 27(2): 189 ~ 197.
- [15] 钟万勰, 张洪武, 吴承伟. 参变量变分原理及其在工程中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1997. 244 ~ 251.
- [16] Zhang Hongwu, Zhong Wanxie, Gu Yuanxian. A combined programming and iteration algorithm for finite element analysis of contact problems[J]. ACTA Mech Sinica, 1995, 11: 314 ~ 326.
- [17] 吕和祥, 马莉颖. 三维接触问题的拟二维序列解法[J]. 固体力学学报, 1996, 17(1): 31 ~ 37.
- [18] 陈万吉, 陈国庆. 接触问题的互补变分原理与非线性互补模型[J]. 计算结构力学及其应用, 1996, 13(2): 138 ~ 146.
- [19] Li M, Sha D, Tamma K K. Linear complementary formulations involving frictional contact for elastoplastic deformable bodies [J]. J Appl Mech, 1997, 64: 80 ~ 89.
- [20] Zhong Wanxie, Sun Suming. A finite element method for elastoplastic structure and contact problem by parametric quadratic programming. Int J Numer Meth Engng, 1998, 26: 2723 ~ 2738.

(下转第 68 页)

定为不适合拱坝设计。澳大利亚 1917 年建成的高 110 m 的塞沙那(Cathana)坝,该工程原先是按拱坝设计的,当平洞开挖后,发现基础不适合修筑拱坝。此时导流洞已完工,而 CFRD 底宽较窄,适合已建的导流洞,采用 CFRD 方案还可以抢回失去的时间。在塞沙那坝建成后,随后在塔斯马尼亚州修建的数座大坝也都采用了 CFRD 坝型。哥伦比亚 1974 年建成的高 140 m 的安奇卡亚(Alto Anchicaya)坝,由于地基条件和预算费用的限制,拟建的混凝土重力坝变得不可行,且坝址位于雨林中,不适合修建粘土心墙堆石坝。尽管大坝的高度在当时是史无前例的,最后还是根据地基的适应性、工期和费用等条件,确定采用了 CFRD。美国 1979 建成的高 95 m 的贝利(R. D. Bailey)坝,美国陆军工程师团当时规划把这座坝设计成粘土心墙堆石坝。由于心墙材料匮乏,出于成本 and 环境的考虑而改为面板堆石坝。泰国 1984 年建成的高 130 m 的考伦山(Khao Laem)坝,因多年来认为在夸伊内河的喀斯特坝址上建坝是不可行的,从技术和经济可行性角度看,CFRD 是唯一可选的坝型。

CFRD 作为主要坝型取得重要进展的标志是 1980 年巴西建成的高 160 m 的阿里亚(Foz do Areia)坝。该坝建在伊瓜苏河上的一个宽阔坝址处,是在一条主要河流上修建的第一座 CFRD,为当时世界上最高的 CFRD。尽管缺少一些先例,但基于成本最低和工期最短的考虑,仍选择了 CFRD。

1967 年只修建了 6 座碾压的 CFRD,而到了 1988 年,已有 70 座 CFRD。截至 1988 年,已克服了坝型选择障碍,CFRD 已成为认可的主要坝型,并被纳入可行性研究。

3 作为主要坝型的 CFRD(1988 ~ 1999 年)

1971 年澳大利亚建成的高 110 m 的塞沙那坝变形很小,面板没有出现裂缝,取得了很大成功,由此奠定了现代 CFRD 的技术基础。20 世纪 80 年代,混凝土面板堆石坝移向南美,20 世纪 90 年代向巴西和中国发展。

1999 年 10 月,在巴西召开了一次关于 CFRD 坝型运行状况的研讨会。会上提交了 36 篇论文,与会代表们认为,CFRD 发展很快的主要原因是充分利用当地筑坝材料,施工简单,工期短,费用低。摩洛哥 A. 阿拉米和 A. E. 什赖比撰写的论文叙述了对两种可行性研究方案的修改情况:20 世纪 70 年代选择了 ECRD,后来与 ECRD 或 RCC(碾压混凝土)方案作了比较,表明选择 CFRD 更为经济和优越。在一坝址砾石覆盖厚度为 30 m,倾向采用设置混凝土防渗墙的 CFRD,因为它是 RCC 方案费用的 1/3。智利的圣

胡安那(Santa Juana)CFRD 在砾石层上设置混凝土槽板的先例已为许多坝址所采用。

1988 年至 1999 年期间,CFRD 已纳入可行性研究中,并在修编初期的可行性研究中作为候选方案。

4 1999 年的 CFRD

截至 1999 年,CFRD 是一种已成型的堆石坝。在很多或大多数可行性研究中,由于成本较低,施工期较短,选择 CFRD 多于 ECRD。目前世界上最高的 CFRD 是墨西哥 187 m 的阿瓜米尔帕(Aguamilpa)坝和中国 178 m 的天生桥一级坝。拟建的此类高坝还有:哥伦比亚高 190 m 的索加莫索(Sogamoso)坝、巴西 210 m 的坎普斯诺沃斯(Campos Novos)坝、尼泊尔 220 m 的西塞蒂(West Seti)坝、菲律宾 230 m 的阿格布鲁(Agbulu)坝等。

CFRD 的发展和目前的工程实践在许多文献资料中得到了很好的阐述。巴西的伊塔(Ita)坝是当前设计和施工实践的优秀典范。在伊塔坝,引入了一种改进型的混凝土路缘碾压机(concrete extrusion curb machine),可降低成本,加快堆石表面的铺筑以便混凝土面板的浇筑。

本文经杨纪元教授高级工程师校阅,在此表示感谢。

参考文献:

- [1] Cooke J B. The CFRD 1899 - 1999[J]. Hydropower & Dams, 1999, 6(6): 66 ~ 68.
- [2] Cooke J B. Development in high concrete face rockfill dams[J]. Hydropower & Dams, 1997, 4(4): 69 ~ 73.

(收稿日期:2000-11-20 编辑:熊水斌)

(上接第 20 页)

- [21] Wriggers P, Scherf O. Adaptive finite element techniques for frictional contact problems involving large elastic strains[J]. Comput Meth Appl Mech Engng, 1998, 151: 593 ~ 603.
- [22] Refaat M H, Mequid S A. A new strategy for the solution of frictional contact problems[J]. Int J Numer Meth Engng, 1998, 43: 1053 ~ 1068.
- [23] Buczowski R, Kleiber M. Elastoplastic interface model for 3D-frictional orthotropic contact problems[J]. Int J Numer Meth Engng, 1997, 40: 599 ~ 619.
- [24] Buczowski R, Kleiber M. A stochastic model of rough surfaces for finite element contact analysis[J]. Comput Meth Appl Mech Engng, 1999, 169: 43 ~ 59.
- [25] Sellgren U, Olofsson U. Application of a constitutive model for micro-slip in finite element analysis[J]. Comput Meth Appl Mech Engng, 1999, 170: 65 ~ 77.

(收稿日期:1999-09-07 编辑:熊水斌)