

权敏感全局估计及其在水电方案计算中的应用

陈守煜, 刘金禄, 伏广涛

(大连理工大学土木工程系, 辽宁 大连 116024)

摘要:基于陈守煜提出的多目标模糊优选决策理论与模型, 分析该模型对于权变化的敏感性质, 给出了权扰动的转移方程, 进而得到几个权扰动量的估计不等式. 这些不等式反映了权扰动量与决策相对优属度扰动量之间的全局制约关系. 从而为多目标决策系统目标权重变动对决策的影响提供理论依据.

关键词:模糊优选模型; 权扰动转移方程; 权扰动不等式; 水力发电计算

中图分类号:TV214

文献标识码:A

文章编号:1006-7647(2001)03-0021-03

文献[1]建立了多目标模糊优选决策理论与模型. 这个模型在多目标决策系统中得到广泛的应用. 在这个模型中, 一个重要的因素是权重向量. 关于权重向量对优选决策序列的影响是一个有待进一步研究的重要问题. 我们把这方面的问题归结为权敏感分析. 在这里, 我们首先从文献[1]中的模糊优选决策模型出发, 导出了权扰动转移方程. 以此为基础, 进一步研究了权扰动量与决策相对优属度扰动量之间的全局估计关系. 目的是为多目标决策系统目标权重的变动对决策的影响提供理论依据.

1 权扰动转移方程

设多目标决策系统中有待识别的 n 个方案, 关于 m 个目标特征的特征值矩阵为

$$X = (x_{ij})_{m \times n} \quad (1)$$

利用文献[2]中的目标相对优属度公式(越大越优或越小越优)

$$r_{ij} = \frac{x_{ij} - \min_j x_{ij}}{\max_j x_{ij} - \min_j x_{ij}} \quad (2)$$

$$r_{ij} = \frac{\max_j x_{ij} - x_{ij}}{\max_j x_{ij} - \min_j x_{ij}} \quad (3)$$

将特征矩阵转化为目标相对优属度矩阵

$$R = (r_{ij})_{m \times n} \quad (4)$$

其中, $0 \leq r_{ij} \leq 1$.

通过引入距优距和距劣距的概念, 建立目标函数^[1], 可得下面的多目标决策系统模糊优选决策模型

$$u_j = \frac{1}{1 + [(I_j)^{-1} - 1]^2} \quad (5)$$

其中, $I_j = \sum_{i=1}^m w_i r_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$; $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ 为权重向量.

为了考察当权向量作微小变化时, 对决策相对优属度的影响, 我们对式(5)微分得

$$\Delta u_j = \frac{2I_j(1 - I_j)}{[I_j^2 + (1 - I_j)^2]^2} \Delta I_j$$

由于 $\Delta I_j = \sum_{i=1}^m r_{ij} \Delta w_i$, 代入上式可得

$$\Delta u_j = \sum_{i=1}^m \frac{2I_j(1 - I_j)}{[I_j^2 + (1 - I_j)^2]^2} r_{ij} \Delta w_i$$

此式简写作

$$\Delta u_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \Delta w_i \quad (6)$$

其中, 系数 $a_{ij} = \frac{2I_j(1 - I_j)}{[I_j^2 + (1 - I_j)^2]^2} r_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$. 我们把式(6)称为权扰动转移方程. 而系数矩阵

$$A = (a_{ij})_{n \times m} \quad (7)$$

称为权扰动转移矩阵. 在下面的讨论中, 我们可以看到, 矩阵 A 的特性, 能够较深刻地表征权扰动对决策相对优属度的影响.

2 权扰动不等式

为了推导方便, 我们先把权扰动方程改写成向量的形式

$$\Delta u = A \Delta w \quad (8)$$

其中, $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n)^T$, $\Delta w = (\Delta w_1, \Delta w_2, \dots, \Delta w_m)^T$.

通过对上述权扰动转移方程和权扰动矩阵的分

析,我们可以得到以下结论.

定理 1 权扰动量 Δw 和决策相对优属度扰动量 Δu 的分量满足不等式

$$|\Delta u_j| \leq 2 \sum_{i=1}^m |\Delta w_i| \leq 2m \max_i |\Delta w_i| \quad (9)$$

证明:为了估计权扰动转移矩阵 A 中各元素的大小,我们引入辅助函数

$$f(x) = \frac{2x(1-x)}{[x^2 + (1-x)^2]^2}, \quad x \in [0, 1]$$

这是一个非负函数.对它求导得

$$f'(x) = \frac{x^2 + (1-x)^2 + 4x(1-x)}{[x^2 + (1-x)^2]^3} \cdot 2(1-2x)$$

当 $x \in [0, \frac{1}{2})$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ 时, $f'(x) < 0$. 于是可知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有最大值, 最大值 $f(\frac{1}{2}) = 2$.

由矩阵 A 中的元素 a_{ij} 的表达式, 并注意到 $0 \leq r_{ij} \leq 1$ 可得

$$|a_{ij}| \leq 2$$

由扰动转移方程(6)可得

$$\begin{aligned} |\Delta u_j| &\leq \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \cdot |\Delta w_i| \leq \\ &\sum_{i=1}^m \max_i |a_{ij}| \cdot |\Delta w_i| \leq \\ &\sum_{i=1}^m 2 |\Delta w_i| = 2 \sum_{i=1}^m |\Delta w_i| \leq \\ &2m \max_i |\Delta w_i| \end{aligned}$$

于是证明了定理 1 中的不等式(9).

定理 1 以分量的形式描述了权扰动量 Δw 对于决策相对优属度扰动量 Δu 的控制作用.

定理 2 权扰动量 Δw 与决策相对优属度扰动量 Δu 满足不等式

$$\lambda_1 |\Delta w|^2 \leq |\Delta u|^2 \leq \lambda_m |\Delta w|^2 \quad (10)$$

其中 λ_1, λ_m 分别是实对称矩阵 $A^T A$ 的最小、最大特征值.

证明:由扰动转移方程(10)可得

$$\Delta u^T \Delta u = (A \Delta w)^T (A \Delta w) = \Delta w^T A^T A \Delta w$$

设实对称矩阵 $A^T A$ 的全部特征值由小到大依次排列为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. 由线性代数中的正定二次型的性质可知

$$\lambda_1 \Delta w^T \Delta w \leq \Delta w^T A^T A \Delta w \leq \lambda_m \Delta w^T \Delta w$$

以上两个关系式相结合,便得到定理 2 中的不等式(10).

若以分量的形式表示不等式(10),则有

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^m \Delta w_i^2 \leq \sum_{j=1}^n \Delta u_j^2 \leq \lambda_m \sum_{i=1}^m \Delta w_i^2 \quad (11)$$

由此可见,不等式(10)反映了权扰动量 Δw 与决策相对优属度扰动量 Δu 之间的整体相互制约关系.

推论:设 h 为最优决策序列的最小间隙,则保持最优序列不变的权扰动条件是

$$\max_i |\Delta w_i| < \frac{h}{2} \sqrt{\frac{n}{m \lambda_m}} \quad (12)$$

证明:由公式(11)可得

$$\sum_{j=1}^n \Delta u_j^2 \leq \lambda_m \sum_{i=1}^m \Delta w_i^2 \leq \lambda_m m \max_i |\Delta w_i|^2$$

记 h 为最优决策序列的最小间隙,欲使最优序列保持不变,只要每个 $|\Delta u_j| < h/2$,则可满足.由以上不等式可知,保持最优序列不变的一个充分条件是

$$\lambda_m m \max_i |\Delta w_i|^2 < n \left(\frac{h}{2} \right)^2$$

$$\text{即} \quad \max_i |\Delta w_i| < \frac{h}{2} \sqrt{\frac{n}{m \lambda_m}}$$

在这个推论中,特别是对前三位决策序列排序更为重要.

定理 3 设矩阵 A 是权扰动转移矩阵,则实对称矩阵 $A^T A$ 的最小、最大特征值满足下列不等式

$$\lambda_1 \leq [\det A^T A]^{\frac{1}{m}} \leq \lambda_m \quad (13)$$

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{m} \text{tr} A^T A \leq \lambda_m \quad (14)$$

这里 $\det A^T A$ 和 $\text{tr} A^T A$ 分别表示实对称矩阵 $A^T A$ 的行列式和迹.

证明:根据矩阵 $A^T A$ 的特征多项式方程

$$\det(\lambda E - A^T A) = 0$$

的根和系数的关系可知

$$\prod_{i=1}^m \lambda_i = \det A^T A$$

而 $\lambda_1^n \leq \prod_{i=1}^m \lambda_i \leq \lambda_m^n$, 于是得不等式(13).

再由 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = \text{tr} A^T A$ 以及 $m \lambda_1 \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \leq m \lambda_m$, 可得
不等式(14).

3 应用举例

我们引用文献[3]中的一个实例,计算出权扰动转移矩阵 A ,并求得矩阵 $A^T A$ 的特征值,给出了权扰动不等式,并计算出了保持最优序列不变的权扰动范围.

某电站所在地区电网现有装机容量 13×10^4 kW 左右,由省电网送电 10×10^4 kW. 网内没有调峰容量.按该系统规划要求,到 1987 年负荷将有较大增加.按规划水平年份的电力电量平衡计算结果,需要

增加工作容量 8×10^4 kW, 年发电量 4.3 亿 kW·h. 以该电网规划增加 8×10^4 kW 发电工作容量为计算依据, 计算出了该电站合理的装机容量值. 该电站的 4 个比较方案如表 1 所示.

根据目标相对优属度公式(2)和(3), 可得模糊矩阵

$$R = r_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.69 & 0.20 & 0.46 & 0.38 & 0.75 & 0.69 & 0.75 & 1 & 0 \\ 0.38 & 0.55 & 0.82 & 0.73 & 0.49 & 0.36 & 0.25 & 0.92 & 0.67 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

考虑到 9 个目标的权重相同, 即在等权的条件下, 即

$w_i = 1/9$, 文献[3]计算出决策相对优属度向量

$$u = (0.56, 0.57, 0.62, 0.44)$$

即第 3 方案为最优决策.

现在我们进一步计算在等权条件下, 权扰动转移矩阵 A . 按以下步骤:

$$\begin{aligned} \text{a. 由 } I_j &= \sum_{i=1}^9 w_i r_{ij} \text{ 求 } I_j \\ I_1 &= 0.5559, \quad I_2 = 0.5467, \\ I_3 &= 0.5744, \quad I_4 = 0.4444 \\ \text{b. 由 } f_j &= \frac{2I_j(1-I_j)}{[I_j^2 + (1-I_j)^2]} \text{ 求 } f_j \\ f_1 &= 1.9274, \quad f_2 = 1.9481, \\ f_3 &= 1.8725, \quad f_4 = 1.9274 \end{aligned}$$

表 1 某电站增容方案比较

方 案	装机容量 /kW	动态投资 受益率/%	可调峰 系数	水能利 用率	系统年替代 费用/万元	淹没土地 /hm ²	工程总投资 /万元	工期 /a	移民人口 /人	年综合利用 效益/万元
1	2×8750	23	0.5	0.61	1196.6	23.33	2050	2.5	0	0
2	3×8750	20.5	0.58	0.74	1094.2	34.67	2680	3	0	0
3	4×8750	18	0.72	0.84	999.65	46	3354	4	35	20
4	5×8750	15	0.9	0.89	928.1	68	4100	4.5	420	30

c. 由 $a_{ij} = f_j r_{ij}$ 求矩阵 $A = (a_{ij})_{4 \times 9}$

$$A = \begin{bmatrix} 1.9274 & 0 & 0 & 0 & 1.9274 & 1.9274 & 1.9274 & 1.9274 & 0 \\ 1.3442 & 0.3896 & 0.8961 & 0.7403 & 1.4611 & 1.3442 & 1.4611 & 1.9481 & 0 \\ 0.7116 & 1.0299 & 1.0299 & 1.3669 & 0.9175 & 0.6741 & 0.4681 & 1.7227 & 1.2546 \\ 0 & 1.9274 & 1.9274 & 1.9274 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9274 \end{bmatrix}$$

以下计算 $A^T A$ 及其特征值.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6.0281 & 1.2566 & 1.9374 & 1.9678 & 6.3318 & 6.0014 & 6.0120 & 7.5594 & 0.8928 \\ 1.2566 & 4.9274 & 5.1247 & 5.4111 & 1.5142 & 1.2180 & 1.0513 & 2.5332 & 5.0070 \\ 1.9374 & 5.1247 & 5.5786 & 5.7860 & 2.2542 & 1.8988 & 1.7914 & 3.5199 & 5.0070 \\ 1.9678 & 5.4111 & 5.7860 & 6.1313 & 2.3358 & 1.9165 & 1.7215 & 3.7969 & 5.4298 \\ 6.3318 & 1.5142 & 2.2542 & 2.3358 & 6.6915 & 6.2974 & 6.2792 & 8.1418 & 1.1511 \\ 6.0014 & 1.2180 & 1.8988 & 1.9165 & 6.2974 & 5.9762 & 5.9944 & 7.4948 & 0.8457 \\ 6.0120 & 1.0513 & 1.7914 & 1.7215 & 6.2792 & 5.9944 & 6.0688 & 7.3676 & 0.5873 \\ 7.5594 & 2.5332 & 3.5199 & 3.7969 & 8.1418 & 7.4948 & 7.3676 & 10.4777 & 2.1613 \\ 0.8928 & 5.0070 & 5.0070 & 5.4298 & 1.1511 & 0.8457 & 0.5873 & 2.1613 & 5.2889 \end{bmatrix}$$

特征值由小到大的顺序为: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = 0.3667$, $\lambda_7 = 0.6487$, $\lambda_8 = 17.4657$, $\lambda_9 = 38.6872$.

于是得到在 $w = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$ 和 $u = (0.56, 0.57, 0.62, 0.44)$ 处的权扰动不等式

$$0 \leq \sum_{j=1}^4 \Delta u_j^2 \leq 38.6872 \sum_{i=1}^9 \Delta w_i^2$$

最后计算本例中保持最优序列不变的权扰动范围.

将本例中的数据 $m = 9$, $n = 4$, $\lambda_m = 38.6872$, $h = 0.01$ 代入不等式(12)右端计算得

$$\max |\Delta w_i| > 0.0054$$

于是得到该实例中保持最优序列不变的权扰动范围为 $(-0.0054, +0.0054)$.

参考文献:

- [1] 陈守煜, 赵瑛琪. 模糊优选(优化)理论与模型[J]. 应用数学, 1993(1): 1~6.
- [2] 陈守煜. 工程模糊集理论与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- [3] 陈守煜. 水利水电水资源系统的模糊、优化与数值计算[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1989.

(收稿日期: 2001-01-04 编辑: 马敬峰)