

# Monte-Carlo 方法求解水动力学方程的原理及实践

陈冬云, 谈广鸣, 郑邦民

(武汉大学水沙科学教育部重点实验室, 湖北 武汉 430072)

**摘要:**介绍 Monte-Carlo 方法的基本思想及求解 Poisson 方程的原理;利用 Monte-Carlo 方法及图论建立河网计算的随机游动模型,并应用于实际的大型河网中,取得了较好的结果.利用 Monte-Carlo 方法计算河网可以避免解大型的稀疏矩阵,计算简单、灵活.

**关键词:**Monte-Carlo 方法;随机游动模型;河网;水动力学计算

**中图分类号:**TV143

**文献标识码:**A

**文章编号:**1006-7647(2001)03-0024-02

## 1 Monte-Carlo 方法求解水动力学方程的原理

### 1.1 Monte-Carlo 方法的思想

Monte-Carlo(蒙特卡罗)方法<sup>[1]</sup>是一种具有独特风格的数值计算方法,它既能求解确定性的数学问题,也能求解随机性的问题. Monte-Carlo 方法亦称为随机模拟(random simulation)方法.它的基本思想是,为了求解数学、物理、工程技术以及生产管理等方面的问题,首先建立一个概率或随机过程,使它的特征参数等于问题的解;然后通过对模型或过程的观察或抽样来计算所求参数的统计特征;最后给出所求解的近似值.解的精确度可用估计值的标准误差来衡量.

Monte-Carlo 方法近年来已用于水利工程中,如解堰闸流动<sup>[2]</sup>,以及供水管网的分析等<sup>[3]</sup>.

### 1.2 求解 Poisson 方程的原理

利用 Monte-Carlo 方程来求解 Poisson 方程,首先构造一个随机游动模型.设想一个质点自点  $P$  出发,以  $1/4$  的等概率,向  $P$  点相邻接的 4 个节点  $P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}$  中的一个随机游动一步(one step).然后再按同样方式自新位置  $P_{1j}$  向与之相邻的另外 4 个节点之一处随机游动一步(second step).如此继续下去,直到质点第一次到达边界  $\Gamma'$  上的一个节点  $Q$  处时,游动一次(one path to the end)即告终止.

因为游动路线是随机的,设想一条游动路线为

$$\rho_P: P \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots \rightarrow P_{K-1} \rightarrow Q \quad Q \in \Gamma'$$

现在定义一个随机变量  $\xi$ ,游动开始时  $\xi = 0$ ,质点每游一步,应把游动之前的  $\xi$  值增加一项.所增加的项等于函数  $f$  在该点的值与  $-h^2/4$  的乘积,这个质

点游动是随机的,因而  $\xi$  是随机的.质点到达边界  $\Gamma'$  上的节点  $Q$  处时,一次游动停止.

因此,与路线  $\rho_P$  相应的一次随机变量值定义为

$$\xi = V(\rho_P) = -\frac{h^2}{4}[f(P) + f(P_1) + \cdots + f(P_{K-1})] + g(Q)$$

其中,  $V(\rho_P)$  为质点由  $P$  经一条随机路线到达边界节点  $Q$  处的值(value 是随机变量).如果质点游动出发点就是边界节点  $Q$ ,那么它就停留在  $Q$  处,  $\xi = V(\rho_P) = g(Q)$ .已证明随机变量  $\xi$  的数学期望  $E(\xi) = u(P)$ ,那么,就可以通过计算  $E(\xi)$  的值来估计  $U(P)$  的值.

## 2 Monte-Carlo 方法在河网计算中的应用

### 2.1 基本公式

对恒定流,1,2 两个断面的水位差可写作:

$$\Delta Z_{1-2} = Z_1 - Z_2 = \left[ \frac{1}{2g} \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) + \frac{S_{1-2}}{\bar{K}_{1-2}} \right] |Q_{1-2}| Q_{1-2}$$

式中:  $Z$  为水位;  $Q_{1-2}$  为两个断面之间的流量;  $A$  为断面面积;  $\bar{K}_{1-2}$  为两断面之间的平均流量模数;  $S_{1-2}$  为两断面之间距离.或写作:

$$\Delta Z_{1-2} = r_{1-2} |Q_{1-2}| Q_{1-2} \quad (1)$$

其中,  $r_{1-2}$  称为阻力系数.该阻力系数与河道的特性有关.

若以水位差表示流量  $Q$ ,则有:

$$Q_{1-2} = Y_{1-2} \Delta Z_{1-2} \quad (2)$$

式中  $Y_{1-2} = 1/\sqrt{r_{1-2}|\Delta Z_{1-2}|}$  称为断面 1—2 之间

河道的传导系数,或称为虚流量系数。

对于河网中的任意汉点,由连续性方程可得:

$$\sum Q_{1-2} = 0 \quad (3)$$

即在汉点处,连接与汉点的各支河的流进与流出流量的代数和为零。

将式(2)代入式(3),得:

$$\sum Y_{1-2} \Delta Z_{1-2} = 0$$

如图1所示,  $a, b, c, d$  断面为边界断面, 水位已知, 欲求汉点  $A, B$  的水位。

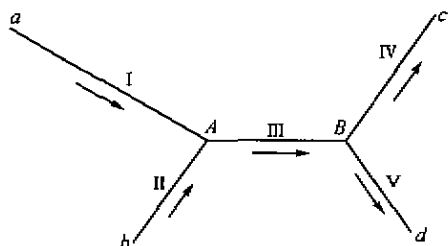


图1 简单河网示意图

对于汉点  $A$ , 由流量平衡可得:

$$Q_{aA} - Q_{AB} + Q_{bA} = 0 \quad (4)$$

以虚流量系数及水位差表示为

$$Y_{aA}(Z_a - Z_A) - Y_{AB}(Z_A - Z_B) + Y_{bA}(Z_b - Z_A) = 0$$

则

$$Z_A = \frac{Y_{aA}Z_a + Y_{AB}Z_B + Y_{bA}Z_b}{Y_{aA} + Y_{AB} + Y_{bA}}$$

$$\text{令 } Y_m = Y_{aA} + Y_{AB} + Y_{bA}, P_{aA} = \frac{Y_{aA}}{Y_m}, P_{AB} = \frac{Y_{AB}}{Y_m},$$

$$P_{bA} = \frac{Y_{bA}}{Y_m}, \text{ 有}$$

$$Z_A = P_{aA}Z_a + P_{AB}Z_B + P_{bA}Z_b \quad (5)$$

其中  $P_{aA}, P_{AB}, P_{bA}$  称为转移概率, 表示周围点对于汉点  $A$  的影响。转移概率有以下特性:

$$0 \leq P_{ij} \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{nb} P_{ij} = 1$$

利用转移概率, 可以将式(5)写为简单形式:

$$Z(K) = P(j, K)Z(j) \quad (6)$$

此式是求某一汉点  $K$  的水位的一般形式。

## 2.2 建立随机游动模型

如图1所示, 设一质点自汉点  $A$  处出发, 按照转移概率分别向与汉点  $A$  相连的三条河段的另一端断面游动, 若第一步到达的断面是边界断面, 则游动一次结束; 若第一步到达的断面是内点, 则从该内点开始继续游动, 直到该质点到达边界断面, 游动结束。游动次数的加权平均值乘以边界断面的水位, 即可得汉点的水位。

我们首先利用同余法产生一个  $(0, 1)$  之间的随机数, 这样产生的随机数称为伪随机数, 但是, 只要它满足一定的检验, 即可认为是随机数。将所产生的随机数与该点的转移概率进行比较, 即可判断走步方向。对于每一个汉点, 当游动次数一定时, 落在各个边界断面上的概率与河道的水文特性有关, 利用此概率及边界断面的水位, 即可求得该汉点的水位。将各汉点的水位赋给相邻断面, 各河道的流量可根据公式(2)求出。

当河网的边界条件为已知边界断面的流量时, 可利用公式(1)转化为已知边界断面的水位。

## 3 计算实例

利用前面所建立的随机游动模型, 求解了珠江三角洲整个河网, 并与常规水力学方法进行了比较, 结果如图2所示, 随机方法的计算结果与常规方法的计算结果是一致的。

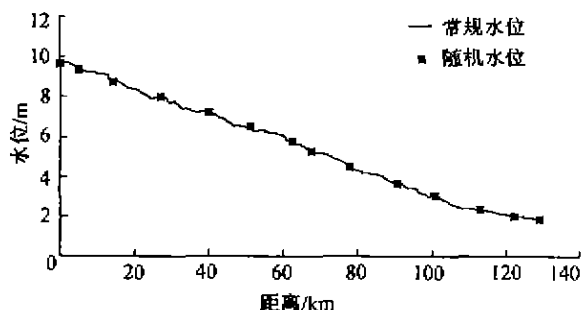


图2 马口—磨刀门水面线常规方法与随机方法计算水位比较

## 4 结论

我们将 Monte-Carlo 方法以及图论应用于大型的河网计算, 建立的随机游动模型, 计算简便, 避免了解大型的矩阵。汉点与河道断面不需要按一定顺序编号, 对于河网中为保证水量、改善水质而进行的河道增减、闸门的调度等工程措施可以很方便地进行模拟, 而且可以计算工程实际中感兴趣的部位, 而不必计算整个河网, 使计算大大简化。

利用本文建立的随机游动模型计算了两个工程实例, 取得了较好的结果。

## 参考文献:

- [1] 徐钟济. 蒙特卡罗方法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1985.5~7.
- [2] 吉庆丰, 郑邦民. 用蒙特卡罗方法解堰闸流动[J]. 水利学报, 1998(9): 32~36.
- [3] 吉庆丰. 蒙特卡罗方法及其在水动力学中的应用研究[D]. 武汉: 武汉水利电力大学, 1999.

(收稿日期: 2000-11-21 编辑: 熊水斌)