

紊流涡旋自相似性及标度不变性研究的进展

肖 勇¹, 金忠青²

(1. 上海港务局远东监理咨询公司, 上海 200080; 2. 河海大学, 江苏 南京 210098)

摘要:在简单回顾紊流涡旋自相似性部分历史研究成果的基础上,着重介绍了因次分析原理与自相似假设的关系,不完全自相似假设在紊流流速分布和阻力规律中的应用、分形理论及标度不变性在紊流研究中的进展;并指出人们对紊流的研究已从紊流的外部图像逐步深入到紊流的内部结构,自相似性、分形、重整化群均是从不同的角度对紊流标度不变性的刻画,因而所得结果具有本质性共同的特征。

关键词:紊流;分形;不完全自相似性;流速分布;阻力规律;标度不变性

中图分类号:TV131.2⁺1

文献标识码:A

文章编号:1006-7647(2001)06-0011-03

自然界中的水流几乎都是紊流,纯粹的层流很少见。紊流研究虽然已有百年左右的历史,并经过众多科学家不懈努力,然其规律仍待深入探索,是至今尚未解决的世界十大难题之一。当代紊流研究存在统计和结构两大学派:统计学派研究紊流的随机特性,但对紊流的拟序特性无能为力;结构学派着重从实验上研究紊流的拟序特性,但未能建立起任何理论体系。两种学派呈交融发展的趋势。研究表明:紊流并非是完全的随机运动,其表面的混乱背后隐藏了有序结构,自相似性的涡旋即是紊流中的一种典型结构。本文在简单回顾紊流涡旋自相似性部分历史研究成果的基础上,着重介绍因次分析原理与自相似假设的关系、不完全自相似假设在紊流流速分布和阻力规律中的应用、分形理论及标度不变性在紊流研究中的进展。

1 紊流涡旋自相似研究的历史回顾^[1~3]

统计学派认为,紊流可以看成是不同尺度的涡旋叠合而成的流动,这些涡旋的大小及旋转方向是随机分布的。紊流拟序结构的发现表明,紊流并非是完全的随机运动,其表面的混乱背后隐藏了某种有序结构。早在 1922 年, L. F. Richardson 就描绘了紊流大涡套小涡,涡中有涡,层层嵌套的自相似结构图像。1930 年, Von Karman 提出紊流脉动速度场的局部运动相似假设; 1941 年, Kolmogorov 针对均匀各向同性紊流,提出了著名的紊流局部各向同性理论(也称小涡旋自相似条件)。1959 年以后,周培源教授带

领他的学生发展了相似性观点,并且把相似性观点用来讨论了不可压缩流体的一些问题、圆形涡旋的流速分布问题、密度并非常量时的速度分布和密度分布问题以及挟沙水流的流速分布和含沙量分布问题。

近年来,人们从一些实验中发现紊流运动中的涡旋实际上并不服从简单的相似性关系。这些涡旋在衰变过程中,本身还要不断地产生一种伸缩现象,这就是说,涡旋的尺度和结构都要随时间的改变而有不同的变化规律。从这一点出发,周培源等把相似性观点发展成为准相似性观点,提出了均匀各向同性紊流的准相似性条件,并用它来研究紊流运动的整个衰变过程。

2 因次分析原理及不完全自相似假设

所谓因次分析原理,实际上就是通过分析各种物理量的属性及其度量规则来寻求各物理量之间某种相互关系的方法。由 E. Buckingham 最先提出的 π 定理是一种具有普遍意义的因次分析法。 π 定理可以叙述如下:假设一个量 a 依赖于控制参数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 其中前面 m 个参数有独立的因次,而后面 $n - m$ 个参数的因次依赖于前面的 m 个参数,如果

$$a = f(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n) \quad (1)$$

那么式(1)可表达成下面的形式:

$$\pi = g(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) \quad (2)$$

这里:

$$\pi = \frac{a}{a_1^a \dots a_m^m}, \quad \pi_i = \frac{a_{m+i}}{a_1^a \dots a_m^m}$$

作者简介:肖勇(1970—),男(土家族),贵州思南人,高级工程师,主要从事水流泥沙运动及岩土工程研究。

参数 π, π_i 是由 α_i 组成的特定的无因次量, 可由因次分析得到. 由于基本因次的独立性, 方程(1)中 n 个变量的函数减少为方程(2)中 $n-m$ 个变量的函数.

因次分析原理(π 定律)的基本根据在于: 任何一个正确表达物理运动过程的方程式, 它的因次必须和谐. 只要它的因次是和谐的, 就可能将其写成一个由无因次量组成的方程式. 这是因次分析原理或 π 定律的核心.

关于参数 π_i 的自相似性是指在参数 π_i 的一个变化范围内, 函数 g 独立于参数 π_i . 在这种情况下, 函数 g 中的自变量个数减少为 $n-m-1$ 个.

关于参数 π_i 的完全自相似的一个充分条件是: 当 $|\pi_i| \gg 1$ 或 $|\pi_i| \ll 1$, 也即 $\pi_i \rightarrow 0$ 或 $\pi_i \rightarrow \infty$ 时, 函数 $g \rightarrow$ 一个有限的非零极限.

关于参数 π_i 的不完全自相似指的是当 $\pi_i \rightarrow 0$ 或 $\pi_i \rightarrow \infty$ 时, g 以下列方程趋向于 0 或无限:

$$g \cong \pi_i^\lambda h(\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{n-m}) \quad (3)$$

式中: λ 是一个可能依赖于 h 的自变量的参数.

在这种情况下, 关系式(3)可以用关于 π_i 完全自相似的形式表达如下:

$$\pi_* = h(\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{n-m}) \quad (4)$$

其中 $\pi_* = \pi \pi_i^{-\lambda} = \alpha \alpha_1^{\lambda_1 - \alpha} \dots \alpha_m^{\lambda_m - m} \alpha_{m+1}^{-\lambda}$

由于 α 本身连续依赖于 α_{m+1} , 故这里的相似参数 π 不能事先通过因次分析得到.

3 不完全自相似假设在流速分布和阻力规律中的应用

人们一般认为明渠和管道主流区流速分布的对数型式比指数型式具有更强的理论基础, Barenblatt^[4,5]和肖勇等^[6,7]的研究表明: 紊流流速分布的指数型式和对数型式具有同样严格的理论基础(相似理论), 但是它们却基于本质上不同的两类假设(不完全自相似假设和完全自相似假设); 光滑壁紊流流速分布对数型式假设主流区的流速梯度完全独立于分子粘性, 指数型式则假设主流区的流速梯度以渐近指数的形式依赖于分子粘性; 粗糙壁紊流流速分布指数型式反映了壁面效应, 对数型式则忽略了壁面效应.

肖勇等^[6,7]通过对壁面绕流结构及尼库拉兹实验资料的分析, 建立了能够统一描述紊流三区(光滑区、过渡区、粗糙区)的指数型流速分布公式和阻力规律.

固壁紊流流速分布的指数公式:

$$\frac{u}{u_*} = C \left(\frac{u_* y}{\nu} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{y}{ks} \right)^{\beta_1} \quad (5)$$

式中:

$$C = (1 - \alpha) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln Re + 2.5 \right) + \alpha \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \ln \frac{Re}{R_*} + 5.75 \right)$$

$$\alpha_1 = \frac{3(1-\alpha)}{2 \ln Re}, \quad \beta_1 = \frac{4\alpha}{3 \ln \frac{Re}{R_*}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta), \quad \frac{\theta}{\pi} = \frac{\ln(R_*/R_{*1})}{\ln(R_*/R_{*2})}$$

$$R_{*1} = 1.25, R_{*2} = 100, R_* = \frac{u_* ks}{\nu}$$

由于时均流速分布规律和阻力规律之间存在着内在联系, 所以从理论上来说, 每个时均流速分布都能给出其相应的阻力公式, 公式(5)中含有阻力因子, 因此, 式(5)深刻地反映了流速分布规律与阻力规律的内在联系.

圆管紊流的断面平均流速可由公式(5)沿圆管断面积分得到:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{2C}{(1 + \alpha_1 + \beta_1)(2 + \alpha_1 + \beta_1)} \left(\frac{u_* R}{\nu} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{R}{ks} \right)^{\beta_1} \quad (6)$$

其中 R 为圆管半径.

阻力系数可表示为

$$\lambda = 8 \left(\frac{u_*}{\bar{u}} \right)^2 \quad (7)$$

$$\text{由于} \quad \ln \frac{Re}{R_*} = \ln \frac{\bar{u}}{u_*} + \ln \frac{2R}{ks}$$

因此式(6)必须迭代求解.

将式(6)代入式(7)可得管道和明渠相应的沿程阻力系数 λ 的公式, 为节省篇幅不再列出. 我们用尼库拉兹^[8]的实验资料对管道阻力系数公式进行了验证, 结果符合甚好.

4 紊流的分形理论及标度不变性

分形(fractal)一词由法国数学家 B. B. Mandelbrot 首创^[9], 用来描述那些表面看来复杂、不规则而实际上潜在某种有序规律的几何实体或图形. 分形最基本特征是自相似性及其生发的复杂性和不规则性, 分形维数是分形结构不规则程度的定量表征, 它们不一定是整数. 分形观点认为, 混沌现象产生于有序规律之中, 混沌不是杂乱无章, 在所有表面的混沌现象背后都隐藏着尺度大小不同的被称为分形基元的规律性结构, 分形基元由有序规则即由某种非线性所控制, 而非线性正是产生混沌现象的根源. 近年来的研究表明紊流在许多方面都显示出分形特征. 紊流分形研究的许多工作都涉及到紊流的间歇现象. 1978 年 Frisch 等^[10]基于紊流的标度特性, 提出了间歇紊流的 β 模型理论, 成为研究紊流间歇现象的基础理论, 被此后的研究者广泛引用.

由 β -模型知,令间歇现象的维数为 D ,则

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \bar{\varepsilon}_n \propto E_n / l_n \propto \beta_n v_n^3 / l_n \\ v_n &\propto \varepsilon^{1/3} l_n^{1/3} (l_n / l_0)^{\frac{D-3}{3}} \\ l_n &\propto \varepsilon^{-1/3} l_n^{2/3} (l_n / l_0)^{\frac{3-D}{3}} \\ E_n &\propto \varepsilon^{2/3} l_n^{2/3} (l_n / l_0)^{\frac{3-D}{3}}\end{aligned}$$

易知 $D=3$ 时,

$$l_d = (\varepsilon v^{-3})^{1/4}$$

即为 Kolmogorov 的耗散尺度。

β -模型是对传统的紊流串级耗散结构观点的一种修正。传统的观点是在 Kolmogorov 及 Richardson 研究的基础上所提出的紊流物理图像;而 β -模型则认为每一级尺度的涡的分解都只有 β 部分空间为下一级尺度的有效涡所占有。紊流的间歇现象显示,紊流并非是填满空间,而且紊流的这种不充实性在所有的尺度层次上都存在。显然, β -模型是更符合紊流内在机制的物理模型。

其实,分形理论以几何体作为研究对象,重整化群理论以物理量作为研究对象,紊流研究中应用重整化群理论取得了不少成果^[11],但大都采用了 Kolmogorov 的 $-5/3$ 定律和引入了服从正态分布的随机项。对经典 Kolmogorov 能量串级的 $-2/3$ 和 $-5/3$ 定律的一个重要修正,近期由 Castaing 等^[12]作出,他们基于紊流涡旋的分形特征,得出的一个基本结果是这些修正反比于 $\ln Re_\lambda$,这里 Re_λ 是基于泰勒尺度 λ_T 的雷诺数。

Barenblatt^[4,5]将这个结论推广到充分发展的剪切紊流,给出了光滑紊流的标度律。光滑区紊流流速分布可表示为

$$\frac{u}{u_*} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln Re + 2.5 \right) \left(\frac{u_* y}{v} \right)^{\frac{3}{2 \ln Re}} \quad (8)$$

在流速分布公式(8)中,对如下变换群变换,其形式保持不变:

$$v_1 = \lambda v, u_1 = \lambda^{-a} u \quad (9)$$

该变换也称之为重整化群变换(a 为重整化群参数)。

同理,在流速分布公式(5)中,若令

$$v_1 = \lambda^{1-a} v, ks_1 = \lambda^a ks, u_1 = \lambda^{-a_1 + (a_1 - \beta_1) a} u \quad (10)$$

则公式(5)在上述变换群变换下其形式保持不变。

在紊流流速场分布中,刘式达等^[13]找到了如下速度场之间的广义自相似性关系:

$$\begin{aligned}x' &= \lambda x, t' = \lambda^{1-\beta_t} t, V' = \lambda^{\beta_V} V, \\ \left(\frac{P}{\rho} \right)' &= \lambda^{2\beta_P} \frac{P}{\rho}, v' = \lambda^{1+\beta_v} v\end{aligned} \quad (11)$$

其中 β 为标度指数。

在紊流流速分布表达式中,对一些重整化变换其形式保持不变,即速度场之间有广义的自相似性关系,这从一个侧面说明了对于流体运动,只要连续介质假定成立,控制其运动的方程均为 N-S 方程。

5 结 语

紊流并非是完全的随机运动,其表面的混乱背后隐藏了有序结构,自相似性的涡旋即是紊流中的一种典型结构。从紊流涡旋自相似的图像出发,人们对紊流的研究已逐步深入到紊流的内部结构,从紊流几何形态的描述,逐步深入到紊流的物理实质;自相似性、分形、重整化群均是从不同的角度对紊流标度不变性的刻画,因而所得结果具有本质性共同的特征。

参考文献:

- [1] 夏震寰.现代水力学(三)——紊流力学[M].北京:高等教育出版社,1992.
- [2] 蔡树棠,刘宇陆.湍流理论[M].上海:上海交通大学出版社,1994.
- [3] 窦国仁.紊流力学(下)[M].北京:高等教育出版社,1987.
- [4] Barenblatt G I. Scaling laws for fully developed turbulent shear flows, part 1. basic hypotheses and analysis[J]. J Fluid Mech, 1993, 248: 513 ~ 520.
- [5] Barenblatt G I, Prostokishin V M. Scaling laws for fully developed turbulent shear flows, part 2, processing of experimental data[J]. J Fluid Mech, 1993, 248: 521 ~ 529.
- [6] 肖勇,金忠青.固壁紊流流速分布指数型分布和阻力规律(1)——粗糙区[J].水科学进展,1997(2): 148 ~ 153.
- [7] 肖勇,金忠青.固壁紊流流速分布指数型分布和阻力规律(II)——过渡区[J].水科学进展,1999(1): 64 ~ 68.
- [8] 尼库拉兹.粗糙管中的水流规律[M].张瑞谨译.北京:水利出版社,1957.
- [9] Mandelbrot B B. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension[J]. Science, 1967, 156: 636 ~ 638.
- [10] Frish V, Sulem P L. A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence[J]. J Fluid Mech, 1978, 87: 719 ~ 736.
- [11] Yakhot Victor, et al. Renormalization group analysis of turbulence I basic theory [J]. J of Scientific Computing, 1986, 1 (1): 1 ~ 51.
- [12] Castaing B, Gagne Y, Hopfinger E J. Velocity probability density functions of high reynolds number turbulence[J]. Physica D, 1990, 46: 177 ~ 200.
- [13] 刘式达,刘式适,江明顺等.流体运动中的广义自相似性和标度不变性[J].科学通报,1997(2): 180 ~ 183.

(收稿日期:2000-05-10 编辑:熊水斌)