

推理公式的一种简化算法——牛顿迭代法

程小春, 张善余

(黄山市水文水资源局, 安徽 屯溪 245000)

摘要:针对小流域设计洪水计算中, 采用推理公式求解洪峰流量 Q_m 及汇流时间 τ 的方法繁琐, 查算精度较低等问题, 提出用牛顿迭代法求解, 该方法较原图解试算法收敛快, 迭代次数少, 计算速度快, 精度可靠. 计算实例表明, 用简单迭代法与牛顿迭代法计算设计洪峰流量, 其结果与图解试算法完全一致.

关键词:推理公式; 牛顿迭代法; 简单迭代法; 图解试算法

中图分类号: TV122+.3

文献标识码: A

文章编号: 1006-7647(2002)03-0014-02

1 原理简介

迭代法是计算方法中的一种基本方法, 是用来求解非线性方程(代数方程或超越方程)根的近似算法, 迭代法的计算优劣取决于迭代序列的收敛性且依赖于迭代函数的构造. 构造迭代函数的一条重要途径, 是用近似方程来代替原方程.

1.1 简单迭代法

将方程 $f(x) = 0$ 化为一个等价(同解)的方程: $x = \varphi(x)$, 给定一个初值 x_0 , 代入右端可算得一个 $x_1 = \varphi(x_0)$, 再以 x_1 代入右端, 又可得 $x_2 = \varphi(x_1)$ ……如此继续下去, 会得到一个序列 $\{x_k\}$, 其中:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$\{x_k\}$ 称为迭代序列, $\varphi(x)$ 称为迭代函数, 式(1)称为迭代格式. 如果迭代序列是收敛的, 且收敛于 X^* , 则当 $\varphi(x)$ 连续时, 必有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = \varphi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k)$$

$$\text{即} \quad X^* = \varphi(X^*) \quad (2)$$

或 $f(X^*) = 0$

这说明, 只要迭代序列收敛, 一般总收敛于原方程的解. 实际计算当然不能做无穷多步, 迭代到一定程度, 就取 x_{k+1} 作为原方程根的近似值. 这种求根法称为简单迭代法, 或称逐次逼近法.

1.2 牛顿迭代法

设 x_k 是 $f(x) = 0$ 的一个近似根, 把 $f(x)$ 在 x_k 处作泰勒展开:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) +$$

$$\frac{f''(x_k)}{2!}(x - x_k)^2 + \dots \quad (3)$$

若取前两项来近似代替 $f(x)$ (称为 $f(x)$ 的线性化), 则得近似的线性方程:

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$$

设 $f'(x_k) \neq 0$, 令其解为 x_{k+1} , 得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (4)$$

式(4)称为 $f(x) = 0$ 的牛顿迭代格式. 它对应的方程为

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (f'(x) \neq 0) \quad (5)$$

显然是 $f(x) = 0$ 的同解方程, 所以迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (6)$$

在 $f(x) = 0$ 的根 α 的某个邻域 $R(|x - \alpha| \leq \delta)$ 内, $f(x) \neq 0$,

$$|\varphi'(x)| = \frac{|f''(x)| |f(x)|}{(f'(x))^2} \leq L < 1$$

故在 α 的邻域 R 内, 对任意初值 x_0 , 由式(4)得到的迭代序列收敛于 α . 迭代式(4)所确定的方法称为牛顿迭代法.

牛顿迭代法有明显的几何意义. 由式(4)知 x_{k+1} 是点 $(x_k, f(x_k))$ 处 $y = f(x)$ 的切线:

$$\frac{y - f(x_k)}{x - x_k} = f'(x_k)$$

与 X 轴交点的横坐标如图 1 所示. 也就是说, 新的近似值 x_{k+1} 是用代替曲线 $y = f(x)$ 的切线与 X 轴相交得到的. 继续取点 $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, 再作切线与 X 轴相交, 又可得 x_{k+2} ……由图 1 可见, 只要初

值取得充分靠近 α , 这个序列就会很快收敛于 α .

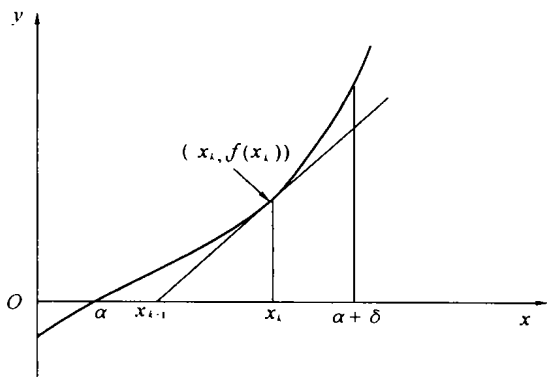


图1 牛顿迭代法原理

由于牛顿迭代法的局部收敛性, 又对初值要求较高, 只有初值取得充分靠近 α , 才能保证序列收敛.

2 算例

某河流流域面积 $F = 142.1 \text{ km}^2$, 河长 $L = 40.45 \text{ km}$, 河道坡度 $J = 0.4\%$, 汇流参数 $m = 1.2$, 流域损失参数 $\mu = 2.5 \text{ mm/h}$, 百年一遇最大 24 h 暴雨量 436.7 mm , 暴雨衰减指数 $n = 0.75$, 要求用推理公式计算该河百年一遇的设计洪峰流量.

2.1 简单迭代法

计算暴雨参数: $S_p = H_{24} 24^{n-1} = 436.7 \times 24^{-0.25} = 197.3 \text{ mm}$.

先假定 $t_c > \tau$ 全面汇流, 由公式:

$$Q_m = 0.278(\alpha - \mu)F = 0.278\left(\frac{S_p}{\tau^n} - \mu\right)F$$

$$\tau = 0.278 \frac{L}{mJ^{1/2} Q_m^{1/4}}$$

则
$$Q_m = 0.278\left(\frac{197.3}{\tau^{0.75}} - 2.5\right) \times 142.1$$

$$= \left(\frac{54.849}{\tau^{0.75}} - 0.695\right) \times 142.1$$

$$= \frac{7794.1}{\tau^{0.75}} - 98.8$$

$$\tau = \frac{0.278 \times 40.45}{1.2 \times \left(\frac{4}{1000}\right)^{1/3} Q_m^{1/4}}$$

$$= \frac{11.245}{1.2 \times 0.159 Q_m^{1/4}}$$

$$= \frac{11.245}{0.190 Q_m^{1/4}}$$

$$= \frac{59.2}{Q_m^{1/4}}$$

则
$$Q_m = \frac{7794.1}{\left(\frac{59.2}{Q_m^{1/4}}\right)^{0.75}} - 98.8$$

$$= \frac{7794.1}{21.3} Q_m^{0.1875} - 98.8$$

$$= 365.9 Q_m^{0.1875} - 98.8 \quad (7)$$

显然, Q_m 不会超过 $365.9 Q_m^{0.1875}$, 令 $Q_m = 365.9 Q_m^{0.1875}$, 则

$$Q_m = 365.9^{1/0.8125} = 1428.6$$

将 1428.6 作为初值进行迭代, 迭代计算结果如下: 当 Q_m 初值为 1428.6, 1330, 1311, 1307, 1306 时, Q_m 分别为 1330, 1311, 1307, 1306, 1306.

于是百年一遇设计洪峰流量为 $1306 \text{ m}^3/\text{s}$, 对应的 τ 值为

$$\tau = \frac{59.2}{Q_m^{1/4}} = \frac{59.2}{1306^{1/4}} = 9.8 \text{ h}$$

$$t_c = \left(\frac{(1-n)S_p}{\mu}\right)^{1/n} = \left(\frac{0.25 \times 197.3}{2.5}\right)^{1/0.75} = 53.3 \text{ h}$$

故经检验, 产流模式符合原假定 $t_c > \tau$.

2.2 牛顿迭代法

如前所述, 牛顿迭代法只是在构造迭代函数方面与简单迭代法有所不同, 在求解推理公式时, 将式 (7) 进行变换可得下式:

$$Q_m - 365.9 Q_m^{0.1875} + 98.8 = 0$$

迭代函数:

$$Q_m(r+1) = Q_m(r) - \frac{Q_m(r) - 365.9 Q_m^{0.1875} + 98.8}{1 - 68.6 Q_m^{-0.8125}}$$

假定初始值 $Q_{m(1)} = 1428.6$, 迭代计算结果如下: 当 Q_m 初值为 1428.6, 1307, 1306 时, Q_m 分别为 1307, 1306, 1306. 故 $Q_m = 1306 \text{ m}^3/\text{s}$.

3 结 语

简单迭代法与牛顿迭代法的计算结果与图解试算法完全一样, 且牛顿迭代法收敛较快, 迭代次数少, 计算速度快, 精度可靠.

参考文献:

- [1] SDJ 22-79, 水利水电工程设计规范[S].
- [2] 徐德龙. 推理公式计算方法的探讨[J]. 水文水资源, 2000 (2): 12 ~ 13.

(收稿日期: 2001-01-08 编辑: 张志琴)

