

迭代法在小偏心受压构件配筋计算中的应用

徐春子¹, 袁子厚²

(1. 长江水利委员会勘测设计研究院, 湖北 武汉 430010; 2. 武汉科技学院数理系, 湖北 武汉 430072)

摘要:针对建筑结构计算中常用的迭代法存在迭代过程繁琐冗长, 计算量过大等问题, 提出采用加速迭代法, 并将该方法应用于小偏心受压构件对称配筋的计算. 计算实例表明, 在相同精度条件下, 加速迭代法与常规迭代法相比, 可以减少迭代次数, 加快计算速度.

关键词:加速迭代法; 收敛速度; 误差; 小偏心; 配筋计算

中图分类号: O241.5; TU375

文献标识码: A

文章编号: 1006-7647(2002)04-0012-02

1 迭代法及其加速方法

在建筑结构计算中常用迭代法. 所谓迭代法是指将方程(或方程组)的解看成是某种极限过程的极限, 而实现这一极限过程中每一步的结果是把前一步所得的结果施行相同的演算步骤得到的. 使用迭代法时主要考虑两个问题: ①迭代过程要收敛; ②收敛速度要快.

首先介绍一收敛定理: 设方程 $x = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 满足: ① $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 连续; ② 对任意 $x \in [a, b]$, $a \leq \varphi(x) \leq b$; ③ $\varphi'(x)$ 存在, 且 $|\varphi'(x)| \leq L < 1$. 则: ①方程 $x = \varphi(x)$ 有惟一解; ②对任意初始值 $x_{(0)} \in [a, b]$, 由迭代公式 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 所得数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x^* , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

下面给出迭代形式及迭代公式的加速方法:

若方程 $f(x) = 0$ 变形为 $x = \varphi(x)$, 迭代 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. 选择适当的松弛因子 λ , 可加速迭代过程.

在 $x = \varphi(x)$ 中, 假定 $\varphi'(x)$ 的估计值为 L , 其中 $\varphi'(x) \approx L$, $|L| < 1$, 等价变形:

$$x + \lambda x = \varphi(x) + \lambda x$$

$$\text{即 } x = \frac{1}{\lambda + 1}(\varphi(x) + \lambda x) \quad (\lambda \neq -1)$$

$$\text{记 } G(x) = \frac{1}{\lambda + 1}(\varphi(x) + \lambda x)$$

$$G'(x) = \frac{1}{\lambda + 1}(\varphi'(x) + \lambda)$$

$$\text{使得 } |G'(x)| = \left| \frac{1}{\lambda + 1}(\varphi'(x) + \lambda) \right| \ll 1$$

记 $\lambda = -L$, 故 $x = \frac{1}{1-L}(\varphi(x) - Lx)$, 迭代过程变为

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-L}(\varphi(x_k) - Lx_k)$$

2 小偏心受压构件对称配筋计算的迭代过程

从钢筋混凝土结构学中可知如下基本公式:

$$N = f_{cm}bx + f'_y A'_s - \sigma_s A_s \quad (1)$$

$$N_e = f_{cm}bx(h_0 - \frac{x}{2}) + f'_y A'_s(h_0 - a'_s) \quad (2)$$

$$\sigma_s = \frac{0.8 - \zeta}{0.8 - \zeta_b} f_y \quad (3)$$

$$e = \eta e_i + \frac{h}{2} - a_s \quad (4)$$

由式(1), (2), (3)得:

$$f_{cm}bx(h_0 - \frac{x}{2}) + f'_y A'_s(h_0 - a'_s) =$$

$$f_{cm}bex + f'_y e A'_s - \frac{0.8 - \frac{x}{h_0}}{0.8 - \zeta_b} f_y e A_s$$

$$\text{即 } x = \left[f_{cm}bh_0x - \frac{1}{2}f_{cm}bx^2 + f'_y A'_s(h_0 - a'_s) - f'_y e A'_s + \frac{0.8f_y e A_s}{0.8 - \zeta_b} \right] / \left[f_{cm}be + \frac{1}{h_0} \frac{f_y e A_s}{0.8 - \zeta_b} \right]$$

此即 $x = \varphi(x)$ 的形式.

$$\varphi'(x) = \frac{f_{cm}bh_0 - f_{cm}bx}{f_{cm}be + \frac{f_y}{0.8 - \zeta_b} \cdot \frac{e A_s}{h_0}} = \frac{f_{cm}bx(h_0 - x)}{f_{cm}b(\eta e_i + \frac{h}{2} - a_s) + \frac{f_y}{0.8 - \zeta_b} \cdot \frac{e A_s}{h_0}}$$

因为

$$|h_0 - x| \leq \max\{|h - h_0|, |\zeta_b - 1| \cdot h_0\} = \max\left\{a_s, \frac{h}{2} - a_s\right\}$$

所以

$$|\varphi'(x)| < 1$$

计算过程如下: ① $x = \frac{N}{f_{cm}b}$ (先按大偏压计算),

当 $x > x_b$ ($x_b = \zeta_b h_0$) 时, 按小偏压计算; ② 令 $x_1 = \frac{x + \zeta_b h_0}{2}$, 代入式(2)求 A'_s ; ③ 将 A'_s 代入式(1), 求出 ζ ($\zeta = x/h_0$) 和 x 的值, 再代入式(2)求 A'_s ; ④ 两次求得的 A'_s 相差不大 (误差不到 5%) 时, 认为合格, 计算结束。否则以第二次求得的 A'_s 值代入式(1)重求 x 值, 代入式(2)重求 A_s 值, 直到精度达到要求为止。

3 计算实例

已知: 轴向力设计值 $N = 240 \times 10^4 \text{ N}$, 弯矩 $M = 24 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$, $b \times h = 400 \text{ mm} \times 700 \text{ mm}$, $a = a' = 35 \text{ mm}$, 混凝土强度等级为 C20, 钢筋 II 级, 构件计算长度 $l_0 = 5 \text{ m}$. 求对称配筋时 $A_s = A'_s$ 的数值。

$$\frac{l_0}{h} = \frac{5000 \text{ mm}}{700 \text{ mm}} = 7.14 < 8$$

取 $\eta = 1$, 则

$$e_0 = \frac{M}{N} = \frac{24 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}}{240 \times 10^4 \text{ N}} = 0.1 \text{ m} = 100 \text{ mm}$$

$$e_a = 0.12(0.3h_0 - e_0) = 11.94 \text{ mm}$$

$$e_i = e_0 + e_a = 111.94 \text{ mm}$$

$$\eta e_i = 111.94 \text{ mm}$$

$$0.3h_0 = 0.3 \times 665 \text{ mm} = 199.5 \text{ mm}$$

故 $\eta e_i < 0.3h_0$

$$e = \eta e_i + \frac{h}{2} - a = 426.94 \text{ mm}$$

$$x = \frac{N}{f_{cm}b} = 545.45 \text{ mm}$$

$$x_b = 0.544 \times 665 \text{ mm} = 361.76 \text{ mm}$$

可见

$$x > x_b$$

计算结果如下:

$$x_1 = 453.6073 \text{ mm}, A'_{s1} = 768.4186 \text{ mm}^2$$

$$x_2 = 501.1323 \text{ mm}, A'_{s2} = 567.5208 \text{ mm}^2$$

$$x_3 = 510.5161 \text{ mm}, A'_{s3} = 533.8690 \text{ mm}^2$$

$$x_4 = 512.2129 \text{ mm}, A'_{s4} = 527.9958 \text{ mm}^2$$

$$x_5 = 512.5130 \text{ mm}, A'_{s5} = 526.9638 \text{ mm}^2$$

$$x_6 = 512.5659 \text{ mm}, A'_{s6} = 526.7823 \text{ mm}^2$$

$$x_7 = 512.5751 \text{ mm}, A'_{s7} = 526.7504 \text{ mm}^2$$

若将上述计算过程中的 ② 改为 $x_{k+1} =$

$$\frac{1}{1 - 0.0000635} (\varphi(x_k) - 0.0000635 x_k), \text{ 将加快收敛速度.}$$

其中 $L = -0.0000635$, 计算如下:

$$A'_s = \frac{Ne - f_{cm}bx(h_0 - \frac{x}{2})}{f'_y(h_0 - a)} = 1237.8 \text{ mm}^2$$

$$\varphi'(x) \Big|_{x=545.45} = \frac{f_{cm}bh_0 - f_{cm}bx}{f_{cm}be + \frac{1}{0.8 - \zeta_b} \cdot \frac{eA_s}{h_0}} \Big|_{x=545.45} \approx 0.0000635$$

用加速迭代法的计算结果如下:

$$x_1 = 506.8561 \text{ mm}, A'_{s1} = 426.0188 \text{ mm}^2$$

$$x_2 = 508.6656 \text{ mm}, A'_{s2} = 546.7582 \text{ mm}^2$$

$$x_3 = 508.5673 \text{ mm}, A'_{s3} = 540.3479 \text{ mm}^2$$

$$x_4 = 508.5726 \text{ mm}, A'_{s4} = 540.6943 \text{ mm}^2$$

参考文献:

[1] 天津大学, 同济大学, 东南大学. 混凝土结构(上册)[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1996.

(收稿日期: 2001-04-19 编辑: 张志琴)

(上接第 8 页)

表 3 栽插密度试验成果

栽插密度 /(万穴·hm ⁻²)	株距 /cm	行距 /cm	基本苗 /(万穴·hm ⁻²)	平均穗 长/cm	有效穗数 /(万穴·hm ⁻²)	穗粒数 /粒	实粒数 /粒	结实率 /%	千粒重 /g	理论产量 /(kg·hm ⁻²)	实收产量 /(kg·hm ⁻²)
45.0	8.3	26.6	81.0	16.4	255.5	136.8	129.0	94.2	30.42	10026.3	10033.5
37.5	10.0	26.6	82.5	15.9	246.3	138.3	133.1	96.3	30.53	10008.5	10380.0
32.1	11.7	26.6	86.7	16.2	222.0	155.5	149.0	95.8	30.43	10065.6	10134.0
25.1	15.0	26.6	75.3	16.4	207.0	160.9	152.3	94.6	30.33	9561.8	9660.0

参考文献:

[1] 吴玉柏, 王学秀. 水稻动态灌溉技术在皂河灌区的推广[J]. 水利水电科技进展, 1998, 18(1): 55~58.

[2] 彭世彰, 边立明, 朱成立. 作物水分生产函数的研究与发展[J]. 水利水电科技进展, 2000, 20(1): 17~20.

(收稿日期: 2001-05-11 编辑: 熊水斌)