

泄水建筑物下游收缩断面水深的简化公式

熊亚南

(扬州大学水利与建筑工程学院, 江苏 扬州 225009)

摘要:通过对泄水建筑物下游收缩断面水深 h_c 计算方程式进行数学变换, 采用改善迭代收敛的 Steffensen 方法, 推得 h_c 的一个简明算式. 计算分析表明, 该简化公式不仅计算便捷, 而且计算精度高(当 $h_c/E_0 \leq 0.2$ 时, 计算相对误差不超过 0.2%), 有较高的实际应用价值.

关键词:泄水建筑物; 收缩断面; 水深; Steffensen 方法

中图分类号: TV135.2

文献标识码: A

文章编号: 1006-7647(2002)05-0028-02

泄水建筑物下游收缩断面水深 h_c 是进行泄水建筑物下游水流衔接状态分析、消能工程设计的一个重要水力要素. 目前计算 h_c 的常用方法有图解法、试算法和迭代法, 前一种方法计算精度不高, 后两种方法人工计算量大, 不便于在生产实践中推广应用. 本文依改善迭代收敛的 Steffensen 方法, 推得 h_c 的一个简明算式, 并给出了计算实例及计算精度分析.

1 收缩断面水深的计算方程式

如图 1, 取溢流堰下游槽底的水平面为基准面, 则溢流堰上游断面和下游收缩断面的能量方程为

$$P + H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = h_c + \frac{q^2}{2g\varphi^2 h_c^2} \quad (1)$$

$$\text{或} \quad P + H_0 = h_c + \frac{q^2}{2g\varphi^2 h_c^2} \quad (2)$$

式中: P 为溢流堰下游堰高, m; h_c 为收缩断面的水深, m; q 为单宽流量, $\text{m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$; $g = 9.8 \text{ m/s}^2$; φ 为溢流堰的流速系数; H 为堰上水头, m; v_0 为堰上行近流速, m/s; H_0 为堰上全水头, m; α 为动能修正系数.

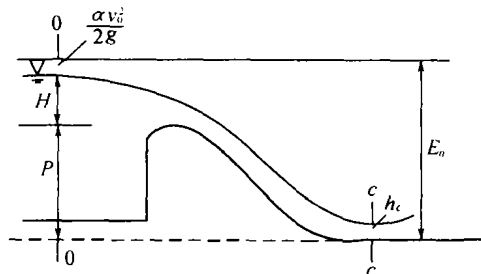


图 1 溢流堰剖面图

若令

$$E_0 = P + H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = P + H_0 \quad (3)$$

$$K = \frac{q^2}{2g\varphi^2} \quad (4)$$

则式(1)变换为

$$h_c^3 - E_0 h_c^2 + K = 0 \quad (5)$$

式(5)即为收缩断面水深 h_c 的一元三次方程式.

2 用 Steffensen 迭代法计算收缩断面水深的简化公式

2.1 Steffensen 迭代法

若非线性方程 $f(x) = 0$ 的基本迭代格式为

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

则 Steffensen 迭代法就是将原迭代改写成下述过程:

$$\begin{aligned} y_n &= \varphi(x_n) & z_n &= \varphi(y_n) \\ x_{n+1} &= \frac{x_n z_n - y_n^2}{z_n - 2y_n + x_n} = x_n - \frac{(y_n - x_n)^2}{z_n - 2y_n + x_n} \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

它的基本迭代形式是:

$$x_{n+1} = \Psi(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

其中迭代函数为

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{x\varphi(x) - [\varphi(x)]^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} \\ &= x - \frac{[\varphi(x) - x]^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

若 x^* 是非线性方程式的解, 只要 $\varphi'(x^*) \neq 1$, 那

么不管原基本迭代式 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 收敛还是不收敛, 由它构成的 Steffensen 迭代式至少平方收敛^[1]. 因此, Steffensen 迭代法是对原基本迭代法的一种改善.

2.2 收缩断面水深的 Steffensen 迭代格式

由于式(5)为 h_c 的非线性方程, 一般不容易直接求出 h_c 的解析解, 故有了试算法、图解法和迭代法等近似解法. 现按改善迭代收敛的 Steffensen 方法^[1], 先将式(5)表达为

$$h_c = \sqrt{\frac{K}{E_0 - h_c}} \quad (10)$$

再按 Steffensen 迭代法将上式改写成:

$$h_{cn+1} = h_{cn} - \left(\sqrt{\frac{K}{E_0 - h_{cn}}} - h_{cn} \right)^2 / \left[\left(\frac{K}{E_0 - \sqrt{\frac{K}{E_0 - h_{cn}}}} \right)^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{\frac{K}{E_0 - h_{cn}}} + h_{cn} \right] \quad (11)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

因为 $h_c \geq 0$, 故可取 h_c 的迭代初始值 $h_c = 0$.

2.3 计算精度分析

按 Steffensen 迭代法, 即按式(11)迭代计算收缩断面水深 h_c , 迭代 1 次的计算值设为 h_{c1} , 迭代 2 次的计算值设为 h_{c2} ; 用牛顿迭代法^[2]按控制精度 $|h_c^{n+1} - h_c^n| < 10^{-8}$ 编程, 计算的收缩断面水深设为 h_c^* (近似为真值), 则 Steffensen 迭代式迭代 1 次计算值的相对误差为 $\delta_1 = |h_c^* - h_{c1}| / h_c^*$, 迭代 2 次计算值的相对误差为 $\delta_2 = |h_c^* - h_{c2}| / h_c^*$. 相对误差计算结果如图 2 所示.

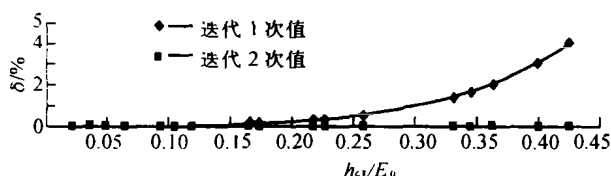


图 2 收缩断面水深相对误差 δ 分析

由图 2 可以看出, 按 Steffensen 迭代法计算的收缩断面水深的相对误差 δ 与 h_{c1}/E_0 成正比. 迭代 1 次, 当 $h_{c1}/E_0 \leq 0.1$ 时, 相对误差 δ_1 为 0; 当 $h_{c1}/E_0 \leq 0.2$ 时, 相对误差 δ_1 不超过 0.2%; 当 $h_{c1}/E_0 \leq 0.3$ 时, 相对误差 δ_1 不超过 1%; 当 $h_{c1}/E_0 \leq 0.4$ 时, 相对误差 δ_1 不超过 3%. 迭代 2 次, 当 $h_{c1}/E_0 \leq 0.4$ 时, 相对误差 δ_2 最大不超过 0.02%. 可见, 在实际工程可能发生的 h_c/E_0 比值范围内, 按式(11)迭代 1 次或 2 次计算的 h_c 精度非常高.

2.4 收缩断面水深的简化公式

由精度分析可知, 采用 Steffensen 迭代法迭代 1 次, 即可得出很高精度的 h_c 的近似解值, 此时式

(11)可写成:

$$h_c = t^2 / \left(2t - \sqrt{\frac{K}{E_0 - t}} \right) \quad (12)$$

式(12)即为计算收缩断面水深的简化公式, 其中:

$$t = \sqrt{K/E_0} \quad (13)$$

3 算例

以文献[3]的例题 14-1 为例, 进一步说明用简化公式计算收缩断面水深 h_c 的步骤. 已知: 某溢流堰下游堰高 $P = 15$ m, 下泄单宽流量 $q = 15$ m³/(s·m), 流速系数 $\varphi = 0.936$, 堰上全水头 $H_0 = 3.63$ m. 求: 溢流堰下游收缩断面的水深 h_c .

解: ①按式(3) $E_0 = P + H_0$, 计算得 $E_0 = 18.63$ m; ②按式(4)计算得 $K = 13.103 121$ m³; ③按式(13)计算得 $t = 0.838 650$ m; ④按式(12)计算得 $h_c = 0.858 655$ m.

本例用试算法^[3]计算得 $h_c = 0.86$ m; 用 AGA 法^[4]计算得 $h_c = 0.858 672$ m; 用牛顿迭代法按控制精度 $|h_c^{n+1} - h_c^n| < 10^{-8}$ 编程, 计算得 $h_c = 0.858 6723$ m. 可见本文的简化公式与试算法、AGA 法和牛顿迭代法的计算结果是一致的, 并且该式比前 3 种方法更便捷, 只需用普通计算器很快即可求得 h_c .

4 结 语

针对目前计算 h_c 常用方法图解法、试算法和迭代法的不足, 本文用改善迭代收敛的 steffensen 方法, 推得 h_c 的一个简明算式. 计算分析表明, 当 $h_c/E_0 \leq 0.2$ 时, 计算相对误差不超过 0.2%; 当 $h_c/E_0 \leq 0.3$ 时, 计算相对误差不超过 1.0%; 当 $h_c/E_0 \leq 0.4$ 时, 计算相对误差不超过 3%. 可见在收缩断面水深 h_c 与上游总水头 E_0 之比不超过 0.2 的情况下, 该简化公式不仅计算便捷, 而且计算精度很高, 有较高的实际应用价值.

参考文献:

- [1] 施妙根. 科学和工程计算基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999. 286 ~ 287.
- [2] Germund Dahlquist. 数值方法[M]. 包雪松译. 北京: 高等教育出版社, 1990. 274 ~ 284.
- [3] 清华大学水力学教研室. 水力学(下册)[M]. 修订本. 北京: 高等教育出版社, 1980. 192 ~ 198.
- [4] 金菊良. 计算溢流坝下游收缩断面水深的公式[J]. 水利水电技术, 2001, 32 (3): 19 ~ 21.

(收稿日期: 2001-07-24 编辑: 傅伟群)