

用强化假定不连续应变实体单元分析弹性地基薄板

李文虎¹, 刘晓青¹, 李同春¹, 王祥来²

(1. 河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 上海市水务局, 上海市 200012)

摘要:用强化假定不连续应变(EAS)实体单元离散弹性地基薄板,假设板上的荷载按分布力形式传递到地基中,根据半无限空间上任一点节点力与任一点处的位移关系用高斯积分法建立了地基表面分布力与节点位移关系表达式,在此基础上根据地基与板间的位移协调及静力平衡条件,建立了以板上的节点位移为未知量的有限元方程.算例分析表明,采用强化假定不连续应变实体单元分析薄板类问题是合理的,进行弹性地基薄板受力分析时考虑地基分布反力是必要的.

关键词:EAS 单元;分布反力;半无限地基;高斯积分;有限元

中图分类号:TU470+.3

文献标识码:A

文章编号:1006-7647(2004)04-0017-03

半无限地基上弹性基础板的问题适用范围广,因而其有效求解方法广为人们关注. Zienkiewicz 于 1965 年提出了该类问题的有限元解法^[1],傅作新等在 20 世纪 80 年代对软土地基上水闸底板的内力进行了大量的分析,提出了半无限地基上弹性基础矩形板的有限元-链杆解法^[2],倪光乐等近来提出了弹性矩形板与弹性地基共同作用的简化算法^[3],基本思路与文献[2]相同,但板的位移通过四角点支承、四边自由矩形板的级数解获得.文献[4]将卜小明等 1991 年提出的任意四边形板单元的协调位移模式^[5]应用于半无限弹性软土地基上任意形状弹性基础板的分析,解决了实际工程中基础板并非一定是矩形形式的问题.

上述文献在分析基础板与地基相互作用时,只计及了地基表面的垂直位移,而没有考虑地基表面水平方向位移的影响,并且均假设在板单元中心处用链杆将地基与板连接,各链杆作用在地基表面上的力均布在与板相对应的地基表面单元上,据此建立板与地基之间的相互作用关系.为了克服上述缺点,本文将文献[6]提出的强化假定不连续应变(enhanced assumed strain)实体单元(简称 EAS 单元)用于离散薄板,这种单元克服了常规的实体单元描述弯曲问题精度很差的缺点.假设板上的荷载按分布力形式传递到地基中,根据半无限空间上任一点节点力与任一点处的位移关系用高斯积分法建立了地基表面分布力与节点位移关系表达式,然后根据地基与板间的位移协调及静力平衡条件,建立了以板的

节点位移为未知量的有限元方程,从而可求得地基分布反力和基础板内力.

1 EAS 单元模式

EAS 单元内的未知量包含连续位移 u_n 和不连续附加应变 $\tilde{\epsilon}_n$:

$$u_n = Nd, \quad \tilde{\epsilon}_n = M\alpha \quad (1)$$

式中: N 为常规的等参单元位移插值矩阵; d 为单元节点位移向量; M 为附加应变插值矩阵; α 为内部应变参数向量; $\tilde{\epsilon}_n = \{\tilde{\epsilon}_x \quad \tilde{\epsilon}_y \quad \tilde{\epsilon}_z \quad \tilde{\gamma}_{xy} \quad \tilde{\gamma}_{yz} \quad \tilde{\gamma}_{zx}\}$.

需说明的是这里给出的假定应变分量顺序与常规有限元书上给出的相同,但与文献[6]中的第五和第六项顺序相反,因此式(2)中矩阵中的元素与文献[6]相比有所不同.

根据变分原理对每一单元可建立如下方程:

$$\begin{bmatrix} D & L \\ L^T & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中: R 为节点力向量; $K = \int_{\Omega} B^T C B d\Omega$ 为常规的位移刚度矩阵,其中 C 为弹性矩阵, B 为应变矩阵; D, L 则分别定义为

$$D = \int_{\Omega} M^T C M d\Omega \quad (3)$$

$$L = \int_{\Omega} M^T C B d\Omega \quad (4)$$

将方程(2)进行静力凝聚,可得只包含位移变量的单元刚度矩阵:

$$k = K - L^T D^{-1} L \quad (5)$$

附加应变插值矩阵为

$$M = \frac{|J_0|}{|J|} T_0^{-1} M_\xi \quad (6)$$

式中: $|J|$ 表示雅可比矩阵 J 的行列式值; $|J_0|$ 为单元局部坐标系原点处的雅可比矩阵行列式值; M_ξ 为局部坐标下的附加应变插值函数; 矩阵 T_0 包含 J_0 的分量 J_{i0} .

2 地基柔度矩阵的建立

2.1 地基表面形心点位移与反力的关系

设地基分布力列阵为 $q_f = \{q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n\}^T$, n 为底板与地基交界面上的节点数. 地基表面节点的位移列阵为 $\Delta^s = \{U_1^s \ U_2^s \ \cdots \ U_n^s\}^T$, 其中 $U_i^s = \{u_i^s \ v_i^s \ w_i^s\} (i = 1 \sim n)$.

假设底板传给地基表面分布力的插值函数采用平面四节点单元的位移插值函数, 则交界面上任一点的分布力可由其所属单元给出:

$$q_e = \sum_{k=1}^4 N_k \bar{q}_k \quad (7)$$

式中: N_k 为四节点单元的形函数; $\bar{q}_k$ 为单元节点分布反力.

根据半无限地基上位移与力^[7]的关系, 有:

$$\Delta^s = C q_f \quad (8)$$

式中: $C = [C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_i \ \cdots \ C_n]^T (i = 1 \sim n)$, $C_i = \sum_{j=1}^{n_e} C_{ij}$, n_e 为单元数.

对式(8)求逆可得:

$$q_f = C^{-1} \Delta^s \quad (9)$$

而根据虚功原理可得节点力列阵为

$$P_f = M q_f = M C^{-1} \Delta^s = K_f \Delta^s \quad (10)$$

式中: K_f 为地基刚度矩阵.

2.2 地基表面节点反力与板节点位移之间的关系

由于地基表面节点位移与板底面节点的位移是一致的, 因此有

$$P_f = K_f \Delta^s = K_f \Delta^d = K_f R \Delta \quad (11)$$

将式(11)两端乘以 R^T 得到作用在板各节点上的地基反力列阵:

$$P' = K_f' \Delta = R^T K_f R \Delta = R^T C^{-1} R \Delta \quad (12)$$

2.3 有限元方程

设板所受的外荷载为 Q , 从中减去基础反力 P' 后, 得到板的有效荷载 Q' , 即

$$Q' = Q - P' \quad (13)$$

而板的节点位移与有效荷载之间的关系为

$$Q' = K \Delta \quad (14)$$

将式(12)和(13)代入式(14)得:

$$(K + R^T M C^{-1} R) \Delta = Q \quad (15)$$

式中: K 为板单元的刚度矩阵. 由式(15)可得出板的节点位移 Δ , 从而计算板单元的内力和地基反力.

3 算例

算例取半无限地基上四边自由的正方形板, 受到垂直向下匀布荷载 $q = 1 \text{ kPa}$ 的作用. 计算中, 取正方形的边长 $a = b = 6 \text{ m}$, 板厚 $t = 0.2 \text{ m}$, 板的弹性模量 $E = 30\,000 \text{ MPa}$, 地基的弹性模量 $E = 3 \text{ MPa}$, 板的泊松比 $\mu = 1/6$, 地基泊松比 $\mu_0 = 0.25$, 正方形板及地基表面的有限元网格见图 1, 坐标系选为 x 和 y 在水平面内, z 垂直向下. 式(2)中的高斯积分点数取为 2×20 .

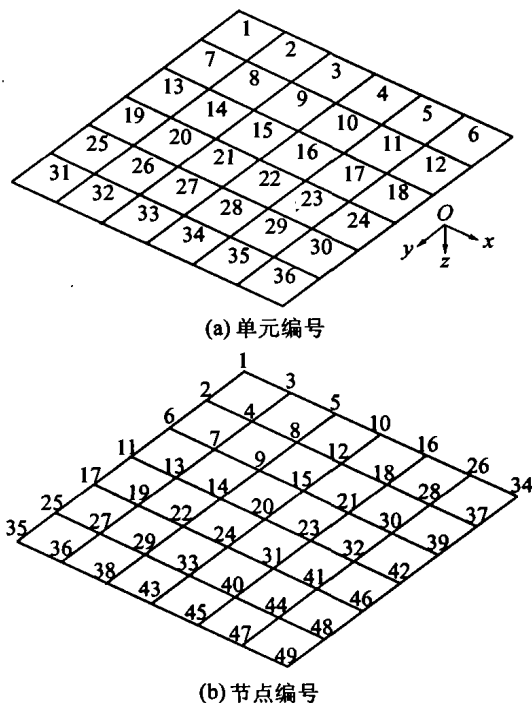


图 1 板及地基表面有限元网格

为了验证 EAS 单元分析薄板类问题的正确性, 首先将薄板与地基的传力按法向连杆联结考虑, 分析时分别对薄板采用了文献[5]中的板单元和文献[6]的 EAS 单元进行了计算, 求得板中心挠度为 0.177 cm 和 0.178 cm , 板中点弯矩分别为 $0.547 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 和 $0.580 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 板与地基接触面单元中点地基反力见表 1, 由于对称关系表 1 中只列出部分单元结果. 表 1 中结果表明两种单元给出了几乎一致的结果, 说明用 EAS 单元代替板单元分析薄板类问题是可行的.

其次按本文方法进行了计算, 计算时考虑了计及(工况 1)和不计及(工况 2)水平变形影响两种工况, 求得两种工况下板中心挠度分别为 0.159 cm 和 0.167 cm , 板中点弯矩分别为 $0.772 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 和 $0.955 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 节点地基分布反力见表 2, 因对称关系表 2 中只列出部分节点结果.

表1 半无限地基上四边自由正方形板 $q = 1 \text{ kPa}$ 时
单元中点地基反力

单元编号	地基反力 P_r/kN	
	板单元	EAS 单元
1	1.720	1.723
2	1.188	1.190
3	1.172	1.171
8	0.651	0.652
9	0.641	0.640
15	0.628	0.624

表2 半无限地基上四边自由正方形板 $q = 1 \text{ kPa}$ 时
单元节点地基分布反力 kPa

节点编号	$q_x(\text{工况1})$	$q_y(\text{工况1})$	q_z	
			工况1	工况2
1	-2.472	-2.472	4.836	6.128
3	0.315	-1.332	1.542	1.557
5	-0.171	-1.311	1.829	2.284
10	0.000	-1.368	1.861	2.229
4	0.282	0.282	0.533	0.085
8	-0.064	-0.222	0.531	0.358
12	0.000	0.241	0.570	0.310
9	-0.071	-0.071	0.569	0.651
15	0.000	-0.070	0.598	0.609
20	0.000	0.000	0.627	0.565

计算结果表明,与板与地基间的力的传递按单元中心集中力考虑相比,按分布力考虑时板中心挠度略有减小,而弯矩则大大增大.其主要原因在于地基反力在板与地基接触周边出现反力集中现象(表1显示周边单元反力较大,表2显示周边节点分布反力远大于内部节点的分布反力),而当板与地基间的力的传递按单元中心集中力考虑时削弱了这种效应.此外,考虑地基水平位移影响时,中心挠度和弯矩均有不同程度减小.

4 结 语

本文引入文献[6]的 EAS 单元用于离散薄板,

克服了常规的实体单元描述弯曲问题精度很差的缺点.根据板与地基之间的位移协调条件和静力平衡条件,建立了考虑板与地基水平及垂直相互作用,其间力的传递按分布形式考虑,以板的节点位移为未知量的有限元方程.算例表明,与板与地基间的力的传递按单元中心集中力考虑相比,按分布力考虑时板中心挠度略有减小,而弯矩则大大增大.其主要原因在于地基反力在板与地基接触周边出现反力集中现象,而当板与地基间的力的传递按单元中心集中力考虑时削弱了这种效应.此外,考虑地基水平位移影响时,中心挠度和弯矩均有不同程度减小.实际工程中计算板的内力时如板与地基间的力的传递按单元中心集中力考虑,则所得计算结果偏于不安全.

参考文献:

- [1] Cheung Y K, Zienkiewicz O C. Plates and tanks on elastic foundations and application of finite element method[J]. Int J Solid Structures, 1965(1): 451 ~ 461.
- [2] 傅作新.弹性基础板的有限元-链杆法[A].傅作新.水工结构力学问题的分析与计算(傅作新论文选集)[C].南京:河海大学出版社,1993.150 ~ 158.
- [3] 倪永乐,李成明,苏克之.弹性矩形板与弹性地基共同作用的简化算法[J].岩石力学与工程学报,2000,19(5): 659 ~ 665.
- [4] 王祥来,李同春.异形弹性基础板的有限元分析[J].水利水运工程学报,2002(1): 49 ~ 51.
- [5] 卜小明,龙驭球.一种薄板弯曲问题的四边形位移单元[J].力学学报,1991,23(1): 53 ~ 59.
- [6] Andelfinger U, Ramm E. EAS elements for two dimensional, three dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1993, 36: 1311 ~ 1337.
- [7] 吴家龙.弹性力学[M].北京:高等教育出版社,2001.245 ~ 267.

(收稿日期:2003-11-03 编辑:熊水斌)

·简讯·

“全国水文学学术讨论会”将在南京召开

为了交流近年来水文科学研究的新进展,活跃水文学学术气氛,激励广大水文科技工作者的积极性和创造性,充分发挥科学技术第一生产力的作用,不断推动新时期的水文科研工作,中国水利学会水文专业委员会决定于2004年11月在南京召开“全国水文学学术讨论会”.会议由中国水利学会水文专业委员会主办,河海大学承办,长江水利委员会水文局、黄河水利委员会水文局、江苏省水利厅协办.会议的主要议题是:①水文基础理论(水文循环、产流汇流、洪水不确定性分析、水动力学等);②水文预报技术(水文作业预报、分布式水文模型、洪水预报系统、城市雨洪模型等);③水文信息技术(水文信息采集与处理、数据库管理、信息共享、3S技术的应用等);④水资源可持续利用和水环境保护等.

本次会议面向全国征集论文,会议入选论文将由出版社正式出版论文集.会议联系:210098,南京市西康路1号,河海大学科学研究院,电话:025-83787166.

(本刊编辑部供稿)