

桥墩群体绕流的复变函数理论解

张兰丁

(南京水利科学研究院水工水力学研究所,江苏 南京 210029)

摘要 桥墩群体绕流的复变函数理论解给出了在平面无旋流动条件下,多个桥墩绕流的理论解,从而将经典流体力学的桥墩绕流的理论解由单个推广到了多个.采用该理论解,通过试算得出了桥墩横断面的理论曲线,可根据预定的墩间流速进行多个桥墩绕流时的横断面设计,合理地确定桥墩间距,并可给出墩间二维流场理论解.按势流处理,水流流过该理论解给出的桥墩横断面时是无分离的,虽与实际情形有所出入,但具有理论基础,因此可供桥梁工程规划、设计参考引用.

关键词 桥墩群体 绕流 势流 复变函数 理论解

中图分类号 :TV131.3 ;U442.3 文献标识码 :A 文章编号 :1006-7647(2005)01-0014-03

Theoretical solution of complex function about flow around bridge piers//ZHANG Lan-ding (Hydraulic Engineering Department , Nanjing Hydraulic Research Institute , Nanjing 210029 , China)

Abstract :The theoretical solution of flow around several bridge piers was given under the plane irrotational flow condition. Hence the solution of flow around single pier in classical fluid mechanics was developed to that around several piers. With the theoretical solution , it is convenient to obtain the theoretical curve for the cross section of bridge piers , and further to design the cross section and reasonably determine the distance between piers with flow around several bridge piers. Moreover , the theoretical solution of 2-D flow field around piers can also be given. According to the theoretical solution , there is no separation in the flow field around piers under potential flow condition , which is of a little difference with the reality. However the solution can still be applied to planning and design in bridge projects because of its theoretical basis.

Key words : bridge piers ; circumfluence ; potential flow ; complex function ; theoretical solution

在对桥墩横断面的设计中,除了对承载力、结构强度应予以考虑外,还应研究桥墩断面形状对水流的相互作用,尽量减少桥墩对水流流态干扰所产生的负面影响.

复变函数,即具有复变量的函数. $\zeta = f(z)$,自变量 $z = x + iy$,因变量 $\zeta = \xi + i\eta$ 都是复变量.如果函数 ζ 有导数 $\frac{d\zeta}{dz}$ 存在,则称这种复变函数为解析函数.在水动力学中,由于解析函数的实部与虚部与平面无旋流动中的流速势函数和流函数完全对应,因此受到早期水动力学研究者的青睐.

文献 [1] 给出:平行流动的复势 $w_1 = u_0 z$ 和位置在 $(d, 0)$ 处的源点 $w_2 = \frac{u_0 b}{\pi} \ln(z - d)$ 的叠加:

$$w = u_0 \left[z + \frac{b}{\pi} \ln(z - d) \right] \tag{1}$$

式(1)所示的平面无旋流动可以看作绕桥墩的流动,但是式(1)仅适用于水面宽阔且只有单个桥墩的情

形,对于工程实际中常出现的情形如:水面不宽只有桥座无中间桥墩的单孔桥,水面稍宽只有一个中间桥墩的双孔桥,宽阔水面有多个桥墩的多孔桥等,式(1)所表示的流动模式就不再适用了.为了解决这一问题,笔者研究了有 n 个间距为 B 的源点分布在 x 轴两侧的情形,如图 1 所示,其相应的复势为

$$w_2 = M \{ \ln(z - d) + \ln[(z - d) + iB] + \ln[(z - d) + i2B] + \ln[(z - d) - iB] +$$

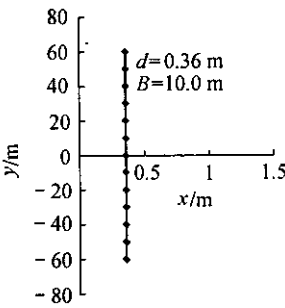


图 1 源点位于 x 轴两侧间距为 B 的示意图

$$\begin{aligned}
& + \ln[(z-d) - i2B] + \dots + \ln[(z-d) + inB] + \ln[(z-d) - inB] \} = \\
& M \{ \ln[(z-d) + \ln[(z-d)^2 + B^2] + \ln[(z-d)^2 + 2^2B^2] + \dots + \ln[(z-d)^2 + n^2B^2] \} = \\
& M \left\{ \ln \frac{\pi(z-d)}{B} + \ln \left[\frac{\left(\frac{\pi(z-d)}{B} \right)^2}{\pi^2} + 1 \right] + \right. \\
& \left. \ln \left[\frac{\left(\frac{\pi(z-d)}{B} \right)^2}{2^2\pi^2} + 1 \right] + \dots + \ln \left[\frac{\left(\frac{\pi(z-d)}{B} \right)^2}{n^2\pi^2} + 1 \right] \right\} + \\
& M \left\{ \ln \frac{B}{\pi} + \ln B^2 + \ln 2^2B^2 + \dots + \ln n^2B^2 \right\} \quad (2)
\end{aligned}$$

由于复势 w 与复势 $(w + \text{常数})$ 表示的是同一种无旋流动,式(2)表示的复势 w_2 可以取消其中的常数项简化为

$$\begin{aligned}
w_2 = M \left\{ \ln \frac{\pi(z-d)}{B} + \ln \prod_{n=1}^n \left[\frac{\left(\frac{\pi(z-d)}{B} \right)^2}{n^2\pi^2} + 1 \right] \right\} = \\
M \ln \left\{ \left[\frac{\pi(z-d)}{B} \right] \prod_{n=1}^n \left[\frac{\left(\frac{\pi(z-d)}{B} \right)^2}{n^2\pi^2} + 1 \right] \right\}
\end{aligned}$$

文献[2]关于无穷乘积展开式有:

$$\operatorname{sh} x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right)$$

于是可得

$$w_2 = M \ln \operatorname{sh} \frac{\pi(z-d)}{B} \quad (3)$$

这样,平行流动绕 n 个桥墩的势流可以表示为

$$w = \varphi + i\psi = u_0z + M \ln \operatorname{sh} \frac{\pi(z-d)}{B} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned}
\varphi = u_0x + \frac{M}{2} \ln \left[\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{B}(x-d) \cos^2 \frac{\pi y}{B} + \right. \\
\left. \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{B}(x-d) \sin^2 \frac{\pi y}{B} \right] \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\psi = u_0y + M \arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{B}}{\operatorname{th} \frac{\pi}{B}(x-d)} \quad (6)$$

并有复速度:

$$\frac{dw}{dz} = u_x - iu_y = u_0 + M \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{B}(z-d)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{B}(z-d)} \frac{\pi}{B} \quad (7)$$

式中 φ 为势函数, ψ 为流函数。

由于

$$\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{B}(z-d)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{B}(z-d)} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{B}(x-d) \operatorname{ch} \frac{\pi}{B}(x-d) - i \sin \frac{\pi y}{B} \cos \frac{\pi y}{B}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{B}(x-d) \cos^2 \frac{\pi y}{B} + \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{B}(x-d) \sin^2 \frac{\pi y}{B}} \\
& \text{代入式(7)后} \\
& u_x = u_0 + \frac{M\pi}{B} \cdot \\
& \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{B}(x-d) \operatorname{ch} \frac{\pi}{B}(x-d)}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{B}(x-d) \cos^2 \frac{\pi y}{B} + \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{B}(x-d) \sin^2 \frac{\pi y}{B}} \\
& \quad (8)
\end{aligned}$$

$$u_y = \frac{M\pi}{B} \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin \frac{\pi y}{B} \cos \frac{\pi y}{B}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{B}(x-d) \cos^2 \frac{\pi y}{B} + \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{B}(x-d) \sin^2 \frac{\pi y}{B}} \\
& \quad (9)
\end{aligned}$$

在桥墩头部 $x=0, y=0$ 处必有 $u_x=0, u_y=0$,代入式(8)化简得

$$M = \frac{u_0B}{\pi} \operatorname{th} \left(\frac{\pi d}{B} \right) \quad (10)$$

将式(10)代入式(5)(6)(8)(9)可得 φ, ψ, u_x, u_y 的相应表达式。

现在研究流函数 $\psi=0$ 的流线,由式(6)和式(10)有

$$y + \frac{B}{\pi} \operatorname{th} \left(\frac{\pi d}{B} \right) \arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{B}}{\operatorname{th} \frac{\pi}{B}(x-d)} = 0 \quad (11)$$

显然 $y=0, x$ 为任意数是一个解,而且在 $x=d$ 处有

$$\begin{aligned}
y + \frac{B}{\pi} \operatorname{th} \left(\frac{\pi d}{B} \right) \arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{B}}{0} = 0 \text{ 而 } \arctan \infty = \pm \frac{\pi}{2} \text{ 有} \\
y = \pm \frac{B}{2} \operatorname{th} \left(\frac{\pi d}{B} \right) \quad (12)
\end{aligned}$$

再由式(11)可得 $y \neq 0, x \rightarrow +\infty$ 时有(此时 $\operatorname{th} \infty = 1$)

$$\begin{aligned}
y + \frac{B}{\pi} \operatorname{th} \left(\frac{\pi d}{B} \right) \arctan \tan \frac{\pi y}{B} = 0 \text{ 即 } \tan \left(\frac{\pi y}{B} \frac{1}{\operatorname{th} \frac{\pi d}{B}} \right) = \\
- \tan \frac{\pi y}{B} = \tan \left(\pi - \frac{\pi y}{B} \right) \text{ 有} \\
\frac{\pi y}{B} \frac{1}{\operatorname{th} \frac{\pi d}{B}} = \pi - \frac{\pi y}{B} \quad (13)
\end{aligned}$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时有

$$\frac{y}{B} = \pm \frac{\operatorname{th} \frac{\pi d}{B}}{1 + \operatorname{th} \frac{\pi d}{B}} \quad (14)$$

式中 B, d 均为给定的常数, y 取正负值。

综上所述, $\psi = 0$ 有 3 条流线, 分别是:

a. $-\infty \leq x \leq +\infty, y = 0$.

b. 当 $-\infty \leq x \leq 0$ 时, $y = 0$; 当 $0 \leq x \leq +\infty$ 时, 由 $x = 0, y = 0$ 处到 $x < d$ 处满足式 (11); 当 $x = d$ 时, $y = +\frac{B}{2} \operatorname{th}\left(\frac{\pi d}{B}\right)$; 当 $d < x < +\infty$ 时, y 满足式 (11); 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y = B \frac{\operatorname{th} \frac{\pi d}{B}}{1 + \operatorname{th} \frac{\pi d}{B}}$.

c. 当 $-\infty \leq x \leq 0$ 时, $y = 0$; 当 $0 \leq x \leq +\infty$ 时, 由 $x = 0, y = 0$ 处到 $x < d$ 处满足式 (11), 此时 y 取负值; 当 $x = d$ 时, $y = -\frac{B}{2} \operatorname{th}\left(\frac{\pi d}{B}\right)$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y = -B \frac{\operatorname{th} \frac{\pi d}{B}}{1 + \operatorname{th} \frac{\pi d}{B}}$.

现取 $\psi = 0$ 的流线为桥墩横断面的固体边界, 如图 2 所示.

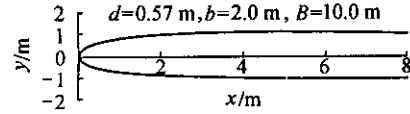


图 2 桥墩横断面 ($\psi = 0$)

再考虑 $\psi = u_0 B$ 处有:

$$B = y + \frac{B}{\pi} \operatorname{th}\left(\frac{\pi d}{B}\right) \arctan \frac{\tan \frac{\pi y}{B}}{\operatorname{th} \frac{\pi}{B}(x-d)} \quad (15)$$

于是可得 $-\infty \leq x \leq +\infty, y = B$ 是一个解, 在 $x = d$ 处有:

$$y = B \left(1 \pm \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{\pi d}{B}\right) \quad (16)$$

同样可得在 $x \rightarrow +\infty$ 处有:

$$y = B \left(1 + \frac{\operatorname{th} \frac{\pi d}{B}}{1 + \operatorname{th} \frac{\pi d}{B}}\right) \quad (17)$$

于是由 $\psi = 0, \psi = u_0 B$ 两条流线簇可得桥墩形状如图 3 所示, 同理可得 $\psi = -u_0 B$ 的桥墩形状.

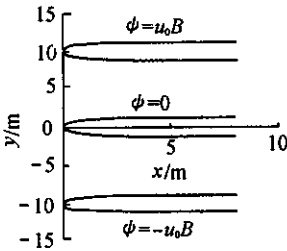


图 3 间距为 B 的多个桥墩

不难看出, 对于单孔桥, 可取图 3 中 $y = 0$ 和 $y = B$ 部分作为桥座, 对于两孔桥则可取 $y = \pm B$ 作

为两侧桥座, $y = 0$ 处便是中间桥墩. 同理还可推广到多孔桥. 为了便于工程设计人员采用本文给出的桥墩断面形式, 现给出几个具体算例, 见表 1. 其中算例 1 见图 4.

表 1 几个算例

算例	宽 b/m	间距 B/m	b/B	源点 d/m
1	2.0	10	0.1	0.36
2	3.0	15	0.2	0.54
3	4.0	20	0.2	0.72
4	2.5	10	0.25	0.46
5	3.75	15	0.25	0.69
6	5.0	20	0.25	0.92

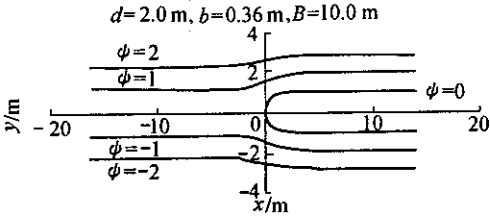


图 4 桥墩横断面 ($\psi = 0$) 及相应流线分布示意图

设计中有以下几个问题需加以注意:

a. 桥墩间距 B 的选择. 桥墩间距 B 可根据所希望的墩间流速来确定. 河流中设置桥墩后, 墩间流速会大于原河流流速, 因此需综合考虑河床床质起动流速, 避免桥墩的局部冲刷等因素.

b. 桥墩宽度 b 的选择. 桥墩宽度往往由工程设计人员根据桥墩间距、桥梁荷载等因素确定. 当 b/B 确定后, 再考虑源点的位置.

c. 源点 d 的选择. 在墩宽一定的条件下, 源点 d 主要影响桥墩头部曲线形状及桥墩的长度.

通过试算可以方便地得出桥墩横断面的理论曲线, 该曲线是复变函数的理论解. 按势流来处理, 水流流过桥墩时是无分离的, 当然实际情形会有所出入, 但是采用本文所提出的方法进行桥墩横断面的设计无疑更具有坚实的理论基础.

参考文献:

[1] 张长高. 水动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1993. 149.
[2] 数学手册编写组. 数学手册 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1979. 193.

(收稿日期 2004-08-03 编辑 熊水斌)

