

确定河流水质参数的抛物方程近似拟和法

郭建青¹, 李彦², 王洪胜¹, 马健²

(1. 长安大学环境科学与工程学院, 陕西 西安 710054 2. 中国科学院新疆生态与地理研究所, 新疆 乌鲁木齐 830011)

摘要 提出了一种新的分析瞬时投放示踪剂条件下的一维河流水团示踪试验数据, 进而确定河流水质参数的方法. 该方法利用抛物方程拟和 $t^{1/2}c-t$ 曲线的峰部区域, 推导出利用曲线上 3 点坐标值计算该抛物方程的极大值和对应时间的公式, 利用该时间公式建立计算河流断面平均流速的公式. 在此基础上, 对浓度-时间数据进行转换, 推导出计算河流纵向弥散系数和综合排放参数的计算公式. 理论推导和算例表明, 抛物方程近似拟和法具有对试验数据组数的要求不高、计算过程比较简单和同时能够计算 3 个水质参数等优点.

关键词 河流示踪试验 近似拟和法 水质参数 参数估计

中图分类号 TV14 **文献标识码** A **文章编号** 1006-7647(2005)02-0011-03

Approximate fitting method of parabolic equation for determination of water quality parameters for rivers//GUO Jian-qing¹, LI Yan², WANG Hong-sheng¹, MA Jian² (1. College of Environmental Science and Engineering, Chang'an University, Xi'an 710054, China; 2. Xinjiang Institute of Ecology and Geography, Chinese Academy of Sciences, Urumqi 830011, China)

Abstract : A new method was presented to analyze 1-D water-mass tracer test data and further to determine the water quality parameters of rivers under the condition of instantaneous injection of tracers. By fitting of the top part of $t^{1/2}c-t$ curve with the parabolic equation, formulas for calculation of the maximum value and corresponding time of the parabolic equation with the coordinates of three points on the curve were derived, and then, with the formulas derived, a formula for calculation of the average flow velocity of different river sections was constructed. Based on the above work, the formulas for calculation of the longitudinal dispersion coefficient and discharge parameter were also derived by concentration-time data transformation. Theoretical derivation and examples of calculation show that the approximate fitting method of the parabolic equation is of such advantages as low requirement for the number of test data, simple process of calculation, and simultaneous calculation of three water quality parameters.

Key words river tracer test ; approximate fitting method ; water quality parameter ; parameter evaluation

目前获得河流纵向弥散系数和其他水质参数的主要途径之一, 就是利用以相应的解析解为基础而建立的数据分析方法, 分析河流水团示踪试验数据. 其中最常见的是分析瞬时投放示踪剂条件下的一维河流水团示踪试验数据, 进而确定河流纵向弥散系数. 现有试验数据的主要分析方法有以相应解析解为基础的单站法、双站法、演算法^[1]、直线图解法^[2]、相关系数极值法^[3]、非线性最小二乘法^[4]和智能优化算法^[5,6]等. 然而, 这些方法在实际应用中均具有一定的局限性. 例如, 单站法、双站法和演算法在应用中均需要具有测点的完整 $c-t$ 曲线, 而且有的方法还要求河流的断面平均流速为已知, 这样无疑加大了野外试验的工作量. 尽管直线图解法、相关系数

极值法、非线性最小二乘法和智能优化算法等方法在应用时, 不要求河流的断面平均流速为已知, 且可以同时计算出河流纵向弥散系数和断面平均流速, 有的还可以直接计算出河流的排放参数, 但在使用这些方法时, 均存在着计算工作量较大、一般需要编制专门程序利用计算机进行计算、不便于在野外利用计算器进行手算, 还需要较多组数的 $c-t$ 试验数据等不足之处. 为了弥补这些方法的不足, 笔者根据文献^[7]中的思路, 利用抛物方程近似拟合 $t^{1/2}c-t$ 曲线的峰部区域, 提出一种计算过程较为简便的近似方法. 该方法不仅可以利用计算器进行手算, 而且还具有可以同时计算河流纵向弥散系数、河流断面平均流速及排放参数等水质参数等特点.

基金项目 中国科学院知识创新工程重要方向项目 (KZCX3-SW-326)
作者简介 郭建青 (1958—), 男, 陕西宜君人, 副教授, 从事水环境数学模型参数计算理论与方法研究.

1 基本公式

在顺直、水流速度与横断面面积沿程基本保持不变的均匀河段上,进行一维水团示踪试验,即在该河段上游瞬时投放质量为 W 的示踪剂.取投放点的位置为空间坐标系的原点,水流方向为 x 轴方向,则描述距投放点一定距离 x 的河水中示踪剂浓度随时间变化规律的解析表达式为^[1]

$$c = \frac{W}{A \sqrt{4\pi D_L t}} \exp\left[-\frac{(x - vt)^2}{4D_L t}\right] \tag{1}$$

式中: c 为投放开始后 t 时刻,在距投放点为 x 的下游测站上的示踪剂浓度,mg/m³; W 为瞬时投放示踪剂的质量,mg; A 为河流横断面面积,m²; D_L 为河流纵向弥散系数,m²/min; x 为采样点与投放点间的距离,m; t 为时间,min; v 为河流断面平均流速,m/min.

试验结果表明,一般在均匀河段上距投放点的距离(x)大于以下计算值时,式(1)就具有较好的准确性^[8]:

$$x \geq \frac{1.8B^2v}{4Hv^*} \quad v^* = \sqrt{gHI}$$

式中: B 为平均河宽,m; H 为平均水深,m; v^* 为摩阻流速,m/min; g 为重力加速度,m/s².

对此,当进行一维河流水团示踪试验、在河段下游布设测站时,应予以考虑.

2 参数计算原理与方法

在式(1)两端同乘以 $t^{1/2}$,可以得到

$$c' = \frac{W}{A \sqrt{4\pi D_L}} \exp\left[-\frac{(x - vt)^2}{4D_L t}\right] \tag{2}$$

其中 $c' = ct^{1/2}$ (3)

在测站距投放点的距离为 x 时,由式(2)表示的 $c'-t$ 曲线如图 1 所示.从图 1 可以看出,当 x 为常数时, $c'-t$ 曲线为一单峰(具有一个极大值)曲线.根据高等数学中的极值原理,不难得到

$$c'_{\max} = \frac{W}{A \sqrt{4\pi D_L}} \tag{4}$$

式中: $c'_{\max}$ 为 $c'-t$ 曲线的最大值,相应地使 c' 达到最大值的时间 $t_m = x/v$. 如果通过其他方法求得 $c'_{\max}$

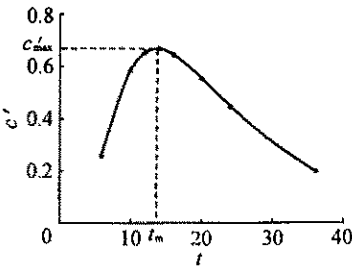


图 1 $c'-t$ 曲线

和相应的 t_m 值,就可以由 $v = x/t_m$ 计算 v 值.

利用式(2)和式(4),经过简单推导可以得到

$$\ln \frac{c'}{c'_{\max}} = -\frac{(x - vt)^2}{4D_L t} \tag{5}$$

在 v 已知的情况下,可令

$$Y = \ln \frac{c'}{c'_{\max}} \tag{6}$$

$$X = \frac{(x - vt)^2}{t} \tag{7}$$

$$b = -\frac{1}{4D_L} \tag{8}$$

则式(5)变为

$$Y = bX \tag{9}$$

显然,式(9)表示在以 Y 为纵坐标、 X 为横坐标的直角坐标系中的通过原点的一条直线,其斜率为 b ,其值既可以利用线性回归法计算,也可以利用以下具有均值意义的公式直接进行计算:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{\sum_{i=1}^N X_i} \tag{10}$$

在得到 b 值之后,就可以利用式(8)计算 D_L .求得 D_L 和 t_m 后,可以利用式(4)计算排放参数 W/A .

到此,可以知道解决问题的关键是如何确定 $c'_{\max}$ 和相应的 t_m 之值.当然,在观测数据比较充分的情况下,可以采用绘制 $c'-t$ 曲线的方法,在曲线图上直接查取得到这两个值.然而,在实际的示踪剂浓度测量过程中,采取水样进行浓度测定都是按照一定时间间隔进行的, $c'-t$ 曲线的峰值不一定可以直接量测得到.所以,通过作图的方法确定 $c'_{\max}$ 和相应的 t_m 之值就会具有一定的任意性.为了解决这个问题,笔者引用文献[7]中介绍的思路,即利用抛物方程近似拟和 $c'-t$ 曲线的峰部区域,然后根据抛物方程的性质确定 $c'_{\max}$ 和相应的 t_m 的值.具体做法是在 $c'-t$ 曲线的峰部附近选取 3 个点 (c'_1, t_1) , (c'_2, t_2) 和 (c'_3, t_3) ,要求 $t_3 > t_m$,采用以下抛物方程近似拟和 $c'-t$ 曲线的峰部区域:

$$c' \approx a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \tag{11}$$

式中: a_0, a_1 和 a_2 为抛物线方程中的系数.根据高等数学中的极值原理与方法可以得到

$$c'_{\max} \approx a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} \tag{12}$$

$$t_m \approx -\frac{a_1}{2a_2} \tag{13}$$

根据以上推导可知,若在 $c'-t$ 曲线的峰部附近选取 3 点 (c'_1, t_1) , (c'_2, t_2) 和 (c'_3, t_3) ,且 $t_3 > t_m$,则通过求解方程组(14)能够得到 a_0, a_1 和 a_2 的解.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 = c_1' \\ a_0 + a_1 t_2 + a_2 t_2^2 = c_2' \\ a_0 + a_1 t_3 + a_2 t_3^2 = c_3' \end{cases} \quad (14)$$

可以解得

$$a_0 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 [c_j' - (a_1 t_j + a_2 t_j^2)] \quad (15)$$

$$a_1 = \frac{(c_3' - c_1')(t_2^2 - t_1^2) - (c_2' - c_1')(t_3^2 - t_1^2)}{(t_3 - t_1)(t_2^2 - t_1^2) - (t_2 - t_1)(t_3^2 - t_1^2)} \quad (16)$$

$$a_2 = \frac{(c_3' - c_1')(t_2 - t_1) - (c_2' - c_1')(t_3 - t_1)}{(t_2 - t_1)(t_3^2 - t_1^2) - (t_3 - t_1)(t_2^2 - t_1^2)} \quad (17)$$

令 $m_1 = c_2' - c_1' \quad m_2 = c_3' - c_1'$

$$k_1 = t_2 - t_1 \quad k_2 = t_3 - t_1$$

$$k_3 = t_2^2 - t_1^2 \quad k_4 = t_3^2 - t_1^2$$

则 $a_1 = \frac{m_2 k_3 - m_1 k_4}{k_2 k_3 - k_1 k_4} \quad (18)$

$$a_2 = \frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{k_1 k_4 - k_2 k_3} \quad (19)$$

在采样时间间隔相同的情况下,有

$$k_1 = t_2 - t_1 = \Delta t$$

$$k_2 = t_3 - t_1 = 2\Delta t$$

$$k_3 = t_2^2 - t_1^2 = \Delta t(t_2 + t_1)$$

$$k_4 = t_3^2 - t_1^2 = 2\Delta t(t_3 + t_1)$$

则 $a_1 = \frac{m_2(t_2 + t_1) - 2m_1(t_3 + t_1)}{2k_3 - k_4} \quad (20)$

$$a_2 = \frac{m_2 - 2m_1}{k_4 - 2k_3} \quad (21)$$

在计算出 a_0, a_1 和 a_2 值之后,就可以用式(12)和(13)分别计算 $c'_{\max}$ 和 t_m 的值,用式 $v = x/t_m$ 计算河流断面平均流速 v ,然后用式(6)和(7)将试验数据转换成相应的 Y 和 X 数据,用线性回归法或式(10)直接计算 $Y-X$ 直线的斜率 b ,然后再用式(8)计算河流纵向弥散系数 D_L ,同时也可计算河流的排放参数 W/A 。

需要说明的是,由于示踪剂在宽度很大的河流中做到均匀投放较为困难,因此文中方法适宜用于分析河宽不大的中小河流上的水团示踪试验数据。

3 计算步骤与算例

为了便于应用,以下结合算例介绍文中方法的应用步骤。

本算例的数据引自文献[2],其原为利用直线图解法确定河流纵向弥散系数 D_L 的算例。表 1 中给出了在参数真值为 $D_L = 3\,000\text{ m}^2/\text{min}$, $v = 30\text{ m/min}$

与 $A = 20\text{ m}^2$ 时,相应不同时间的原始计算数据 c_i-t_i ,且已知 $W = 10\text{ kg}$, $x = 500\text{ m}$, $W/A = 0.5$ 。现利用表 1 中的数据,应用文中的抛物方程近似拟和法确定有关水质参数,以验证其可靠性。

表 1 投放断面下游 500 m 处的示踪剂浓度变化过程的解析解计算值与中间计算数据

t_i/min	$c_i'/(\text{mg}\cdot\text{L}^{-1})$	$c'/(\text{min}^{1/2}\cdot\text{mg}\cdot\text{L}^{-1})$	Y_j	X_j
6	0.254	0.622	-1.4210	17266.930
10	0.583	1.844	-0.3350	4125.773
12	0.649	2.248	-0.1370	1721.861
14	0.663	2.481	-0.0380	508.427
16	0.642	2.568	-0.0035	39.038
20	0.552	2.469	-0.0428	476.288
24	0.444	2.175	-0.1696	1881.723
36	0.197	1.182	-0.7794	8986.029

a. 利用式(3)将在水样测站测定的 c_t 数据转换为 $c'-t$ 数据,列入表 1 的第 3 列,并绘制 $c'-t$ 曲线,如图 1 所示,在图 1 所表示的 $c'-t$ 曲线的峰部附近选取 3 点 (c_1', t_1) , (c_2', t_2) 和 (c_3', t_3) 。在本算例中选取 $t_1 = 14\text{ min}$, $t_2 = 16\text{ min}$, $t_3 = 20\text{ min}$,相应的 $c_1' = 2.481\text{ min}^{1/2}\cdot\text{mg/L}$, $c_2' = 2.568\text{ min}^{1/2}\cdot\text{mg/L}$, $c_3' = 2.469\text{ min}^{1/2}\cdot\text{mg/L}$ 。

b. 分别计算 m_1, m_2 和 $k_1 \sim k_4$ 。计算结果为 $m_1 = 0.087$, $m_2 = -0.012$, $k_1 = 2$, $k_2 = 6$, $k_3 = 60$, $k_4 = 204$ 。

c. 利用式(15), (20) 和 (21) 分别计算 a_0, a_1 和 a_2 。计算结果为 $a_0 = -0.663$, $a_1 = 0.384$, $a_2 = -0.0114$ 。

d. 利用式(12)和(13)分别计算 $c'_{\max}$ 和 t_m ,利用 $v = x/t_m$ 计算河流断面平均流速 v ,计算结果为 $c'_{\max} = 2.577\text{ min}^{1/2}\cdot\text{mg/L}$, $t_m = 16.842\text{ min}$, $v = 29.688\text{ m/min}$ 。

e. 利用式(6)和(7)分别计算不同示踪剂浓度测定时间 t_j 相应的 Y_j 和 X_j 的值,计算结果列入表 1 的第 4 列和第 5 列。

f. 利用式(10)计算出直线斜率 $b = 8.356 \times 10^{-5}$ 。

g. 利用式(8)计算出河流的纵向弥散系数 $D_L = 2990.946\text{ m}^2/\text{min}$ 。

h. 计算排放参数 $W/A = 0.4996$ 。

将 3 个水质参数的计算结果分别与其真值进行比较,可以知道河流纵向弥散系数的计算结果的相对误差为 0.301%、断面平均流速的相对误差为 1.04%、排放参数的相对误差为 0.08%。由此可知,尽管文中提出的方法属于近似方法,只要试验观测数据准确,也能够得到比较准确的水质参数计算结果。另一方面,文中方法对试验数据(下转第 32 页)

固,布置见文献[1]。根据检测结果,T形梁混凝土强度按 C30 取其力学性能指标,混凝土碳化深度按 20 mm计,钢筋锈蚀率按 5%计,钢筋按 I 级钢取其力学性能指标,胶层剪切模量为 1.75 GPa,初始弹性模量为 4 200 MPa,极限抗剪强度为 5 GPa^[1]。

3.2 计算结果分析

由表 2、表 3 可知,在挂-100 极限荷载状态下,虽然钢筋的最大应力值变化不大,但位于梁底的碳纤维仍有效地增大了梁的整体抗弯刚度,所以梁的挠度减小明显,达 56.3%。此时,碳纤维的应力仅为 239 MPa,远低于碳纤维布的设计抗拉强度(3 000 MPa),表明碳纤维的强度未得到充分发挥,碳纤维布加固大大提高了结构的安全储备。

表 2 钢筋混凝土 T 形梁跨中挠度

状 态	荷 载	跨中挠度		
		加固前/mm	加固后/mm	减少/%
正常使用极限状态	汽-20	13.7	13.3	2.9
	挂-100	31.3	30.0	4.2
承载力极限状态	汽-20	19.1	18.4	3.7
	挂-100	98.0	42.8	56.3

表 3 受拉钢筋及碳纤维应力 MPa

状 态	荷 载	加固后		
		加固前 钢筋	钢筋	碳纤维
正常使用极限状态	汽-20	98.7	97.7	97.7
	挂-100	200.0	198.0	215.7
承载力极限状态	汽-20	137.1	133.5	135.0
	挂-100	222.2	221.4	239.0

(上接第 13 页)要求较宽,只要观测到 3 组使 $c'-t$ 曲线达到峰值附近的浓度-时间试验数据,就可以进行数据分析工作,而且计算过程比较简单,既可以将其过程编制程序,在计算机上完成计算工作,也可以利用计算器在试验现场直接进行手算。

4 结 语

理论推导与实际算例表明,文中的抛物方程近似拟和法可用于分析瞬时投放示踪剂条件下的一维河流团示踪试验数据,确定河流纵向弥散系数及其他水质参数。与现有的其他方法相比较,本文方法对野外示踪试验数据的组数要求较低,计算过程比较简单,既可以编程在计算机上完成,也便于在野外现场利用计算器直接进行手算。

参考文献：

[1] 余常昭. 环境水力学[M]. 北京:清华大学出版社,1992.180—181.
[2] 郭建青,温季. 示踪试验确定河流纵向弥散系数的直线图解法[J]. 环境科学,1990,11(2) 24—27.

4 结 论

a. 外粘 CFRP 布加固梁能有效地提高钢筋混凝土的承载能力;CFRP 布加固使梁刚度得到提高,且梁刚度的提高程度随 CFRP 布粘贴层数的增加而增加。

b. CFRP 布的高强特性在受拉钢筋应力水平较高时发挥得较充分,外贴 CFRP 布不仅可以提高钢筋混凝土梁的承载能力,而且可以大幅度地提高其安全储备。

参考文献：

[1] 柯敏勇,柏文正,孔善能,等. 应用 CFRP 加固韩庄闸公路桥 T 梁[J]. 水利水运工程学报,2001(3) 54—58.
[2] 柯敏勇,金初阳,洪晓林. 粘贴钢板加固钢筋混凝土梁结构试验研究[J]. 水利水运工程学报,2001(4) 27—32.
[3] 徐建波. CFRP 加固混凝土梁承载力及 CFRP 布端部应力的分析[D]. 成都:西南交通大学,2002.
[4] 刘海祥,洪晓林,陆采荣. 外贴钢板加固钢筋混凝土梁的分析模型[J]. 水利水运工程学报,2003(3) 27—31.
[5] 张继文,吕志涛,滕锦光,等. 外部粘贴 CFRP 或钢板加固梁中粘结界面应力分析[J]. 工业建筑,2001(6) 1—5.

(收稿日期 2004-03-15 编辑 高建群)

[3] 郭建青,王洪胜,李云峰. 确定河流离散系数的相关系数极值法[J]. 水科学进展,2000,11(4) 387—391.
[4] 郭建青. 非线性最小二乘法在分析河流团示踪试验数据中的应用[J]. 中国给水排水,1991,7(5) 13—17.
[5] 刘毅,陈吉宁,杜鹏飞. 环境模型参数优化方法的比较[J]. 环境科学,2002,23(2) 1—6.
[6] 郭建青,李彦,王洪胜,等. 利用改进 SA 算法估计河流水质参数的仿真实验[J]. 系统仿真学报,2003,15(12): 1750—1752 1762.
[7] Singh S K. Estimating dispersion coefficient and porosity from soil-column tests[J]. Journal of Environmental Engineering, 2002,128(11) 1095—1099.
[8] 金士博 W. 水环境数学模型[M]. 北京:中国建筑工程出版社,1987.18.

(收稿日期 2004-06-08 编辑 高建群)

