

基于正多面体算法的水文频率自动计算研究

马军建¹,董增川¹,王春霞²

(1. 河海大学水资源环境学院,江苏 南京 210098;2. 广东省水利电力勘测设计研究院,广东 广州 510170)

摘要 基于正多面体算法能有效地解决包括带约束的非线性规划的最优化问题在内的各种类型的优化问题,将正多面体方法引入到水文频率计算领域,用来自动获得皮尔逊Ⅲ型分布 3 个参数 $E(X)$, C_v , C_s 的最佳估计值,使经验点据尽可能地接近理论曲线,从而取代目估适线,实现了频率参数的自动优化.以洛阳地区水资源评价为例,验证了本文方法在理论和应用研究中取得较好的效果.

关键词 水文频率 频率计算 正多面体法 皮尔逊Ⅲ型分布

中图分类号 P333.9 **文献标识码** A **文章编号** 1006-7647(2005)02-0017-03

Application of regular polyhedron optimization algorithm to automatic calculation of hydrological frequency//MA Jun-jian¹, DONG Zeng-chuan¹, WANG Chun-xia²(1. College of Water Resources and Environment, Hohai Univ., Nanjing 210098, China 2. Water Conservancy and Electric Power Investigation, Design and Research Institute, Guangzhou 510170, China)

Abstract : In consideration of the fact that the regular polyhedron optimization algorithm is effective in solving various optimization problems, including the problem of nonlinear programming under constraint condition, the algorithm is introduced in the calculation of hydrological frequency so as to obtain the optimal values of three parameters, $E(X)$, C_v , and C_s in the Pearson type-III distribution, and make the result of curve fitting of hydrological samples much close to the theoretical probability distribution. The present method realizes the automatic calculation of frequency parameters. In the case study of water resources evaluation for Luoyang City, the effectiveness of the method in theoretical study and practical application is verified.

Key words : hydrological frequency ; frequency calculation ; regular polyhedron algorithm ; Pearson type-III distribution

由于受复杂多变的气候条件和自然地理条件的影响,水文系列形成了其特有的随机性.长期以来国内外学者致力于两个问题的研究:水文系列的线型选择及其参数估计.目前,我国在频率计算中普遍采用皮尔逊Ⅲ型分布,而分布中的 3 个参数 $E(X)$, C_v , C_s 的最优值则一般通过图解适线法来获得.目估适线法是我国工程人员普遍采用的一种方法,此法根据理论频率曲线与经验数据配合最佳来优选参数.不过目估适线过分依赖于经验判断,缺乏客观标准,结果因人而异.因此,计算机优化适线用来自动计算获得 3 个参数的最优值是合适的,它既能克服参数值的任意性,又能在给定的目标函数下快速、准确地获得最优值.在给定目标函数和约束条件下,影响自动优化适线最终结果的因素主要为最优化方法的选取,不同的优化算法得到的极值精度是有区别的.本文在三参数优选过程中耦合了正多面体最优化算法来提高其精度.正多面体法是一种最优化的直接方法,它不要求目标函数的正则性、连续性和导数存在.正多面体利用移动、收缩、翻转能够有效地

解决包括带约束的非线性规划的最优化问题在内的各种类型的优化问题^[1,2],具有思路清晰、程序简单、计算速度快、收敛性好等优点.

1 正多面体法原理

正多面体法^[1]是基于 W Spenelley 等在 1962 年提出的单纯形法为基础的一种用于解决包含不等式约束优化问题的最优化算法.正多面体在三维空间中是正四面体,共有 4 个顶点,在 N 维欧氏空间中,正多面体则具有 $N + 1$ 个顶点.正多面体的特点是在 N 维欧氏空间的优化区域内始终保持正多面体且形心在可行域内.

正多面体法的工作原理:首先在可行域内选择一点 Y_0 作为初始点,以适当长度为初始边长,在 N 维欧氏空间 E^N (N 为变量数)中形成一个以 Y_0 为形心的正多面体,其顶点为 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N+1}$,然后将正多面体按一定规则变动,包括平移和收缩.每次平移都必须满足下面的条件:保持形心在可行域内,变动后形心处的函数值必须小于(极小化问题)变动前形

作者简介:马军建(1977—),男,河北新乐人,博士研究生,从事水资源管理与规划研究.

心的函数值,如此通过反复使用平移和收缩策略,使正多面体形心逐步逼近最优点 Y_0^* 。

在使用正多面体法之前需要在函数的可行域内给出初始点,以此点为正多面体的形心构建一初始正多面体。按公式(1)可求出初始多面体各顶点的坐标分量 $Y_{ij}(i=1,2,\cdots,n+1;j=1,2,\cdots,n)$ ：

$$Y_{1j} = Y_{0j} + r$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} Y_{1j} - q & j = i - 1 \\ Y_{1j} - p & j \neq i - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{其中 } r = \frac{l}{\sqrt{2(n+1)}} \quad p = \frac{(\sqrt{n+1}-1)l}{n\sqrt{2}}$$

$$q = \frac{(\sqrt{n+1}+n-1)}{n\sqrt{2}}$$

式中 l 为正多面体初始边长。

当正多面体在函数的可行域内被初始化后,就要使用各种搜索策略进行函数的极值寻优,可使用的策略有:平移和收缩。通过这两种搜索策略即可实现本文所研究的问题。现对这两种方法进行简单描述。

a. 正多面体平移搜索策略。图 1 所示的是二维空间中正多面体为正单纯形时的情况。以 Y_0 为初始点构造正多面体的各个顶点,计算原点和各顶点处的函数值 $f(Y_i)(i=0,1,2,3)$ 。通过比较各顶点处的函数值以找出使函数值最小(相对于极小值问题)的顶点 $\min f(Y_i)(i=1,2,3)$,如图 1 所示),此顶点为 Y_1 ,如果 $f(Y_1) < f(Y_0)$,则沿 $\overrightarrow{Y_0Y_1}$ 方向继续进行搜索以试图发现更好的点。 Y_0' 代表使函数值极小点,如果没有更好的点,则令 $Y_0' = Y_1$,并以 Y_0' 为形心根据公式(2)平移正多面体。

$$\begin{cases} Y_{ij}' = Y_{ij} + \Delta_j & i = 1,2,\cdots,n+1 \\ \Delta_j = Y_{0j}' - Y_{0j} & j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \quad (2)$$

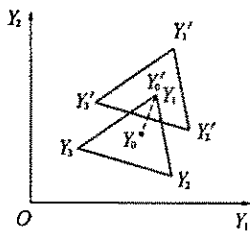


图 1 正多面体平移搜索策略

b. 正多面体收缩搜索策略。如果平移搜索策略失败,就要采用收缩搜索策略。如图 2 所示通过延长 $\overrightarrow{Y_1Y_0}$ 可得到与 $\overrightarrow{Y_3Y_2}$ 的交点 Y_1' 。同理,可构造出一个缩小的正多面体。公式(3)给出了收缩搜索策略的算法。

$$Y_{ij}' = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \frac{Y_{kj}}{n} \quad \begin{matrix} i = 1,2,\cdots,n+1 \\ j = 1,2,\cdots,n \end{matrix} \quad (3)$$

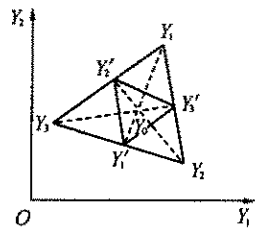


图 2 正多面体收缩搜索策略

正多面体法的精度判断^[3]一般有两种方法:正多面体的边长达到给定的最小边长,即 $L \leq \epsilon_l$ 。前后两次计算的函数极值接近给定的最小值,即 $|f(Y_0)^{k+1} - f(Y_0)^k| \leq \epsilon$ 。本文采用第二种精度判断条件。

2 基于正多面体法的 P-Ⅲ型参数估计

皮尔逊Ⅲ型分布(Pearson-Ⅲ)是我国普遍采用的作为水文变量服从的概率分布,我国有关的技术规范^[5]也将皮尔逊Ⅲ型分布规定为水文频率计算中采用的线型。我国水文学者也曾就国际上应用最多的几种频率分布(P-Ⅲ型、P-V型、L-N型、Gumbel型、K-M型、LP-Ⅲ型)利用实测水文资料进行对比研究,P-Ⅲ型分布不论从拟合的优度还是曲线外延的合理性上较其他线型更适合我国的洪水资料。

P-Ⅲ型的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (x - a_0)^{\alpha-1} e^{-\beta(x-a_0)} \quad (4)$$

对于水文设计值 $P(X \geq x_p) = p$ 中的 x_p ,有

$$x_p = E(X) (\Phi_p C_v + 1) \quad (5)$$

由于频率 $p = f(\Phi_p, C_s)$,通过 C_s - p - Φ 关系数值表(即 P-Ⅲ型分布离均系数 Φ 表),在已知 p 和 C_s 的情况下可查得对应的 Φ ,再根据式(5)计算出设计值 x_p 。

在图解适线法中必须通过不断地调整 C_v 和 C_s 的取值以达到理论曲线和经验点据的最佳配合,为避免目估适线的任意性,本文以正多面体算法为基础建立频率计算数学模型,以寻求 C_v 和 C_s 的最佳估计值。

数学模型的建立及求解:目标函数采用水文学界常用的两种准则——平方和准则和绝对值准则：

$$O.F \min F(E(X), C_v, C_s) = \sum_{i=1}^m (x_i - x_i^*)^2 \quad (6)$$

或者

$$\min F(E(X), C_v, C_s) = \sum_{i=1}^m |x_i - x_i^*| \quad (7)$$

$$\text{s.t. } C_s \leq \frac{2C_v \bar{x}}{\bar{x} - x_{\min}} \quad (8)$$

式中 x_i 为样本系列; x_i^* 为与 x_i 的经验频率 p_i 对应

的理论值 $\bar{x}$ 为样本序列均值 $\bar{x}_{\min}$ 为样本最小值.

以上数学模型中的目标函数式(6)为水文学中常用的平方和准则,目标函数式(7)为绝对值准则. 根据此模型一般可以求得 C_v 和 C_s 最佳估计值,从而使得目标函数最小.

在数学模型的求解中,为了避免初始 C_v 和 C_s 的任意性,采用矩法估计三参数的取值. 模型的求解过程如图 3 所示.

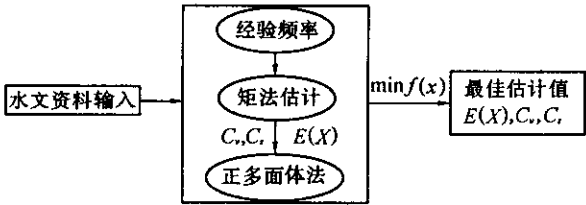


图 3 模型求解过程

3 实例应用

在洛阳地区水资源评价研究中,需要分别按行政分区、流域分区和河流分区来统计该地区内多年降雨量、多年径流量的特征值. 本文研究内容在此次水资源评价中得到了很好的验证,以按河流分区原则划分的伊河和洛河为例,分别对每条河流不同系列的多年径流量进行频率计算,以分析其年际变化规律. 表 1 为采用绝对值准则作目标函数计算的多年径流量特征值.

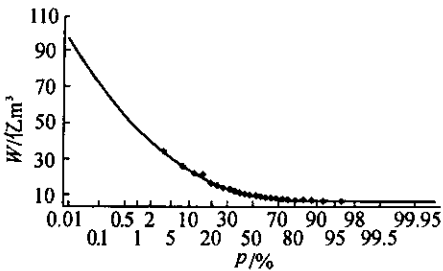
表 1 洛河、伊河多年径流量特征值统计结果

河流	系列起迄年份	多年平均径流量/亿 m ³	C _v	C _s
洛河	1956~1979 年	7.88	0.58	1.74
	1980~1999 年	7.58	0.52	1.04
	1956~1999 年	7.74	0.54	1.62
伊河	1956~1979 年	12.34	0.55	1.10
	1980~1999 年	10.71	0.50	1.00
	1956~1999 年	11.60	0.53	1.06

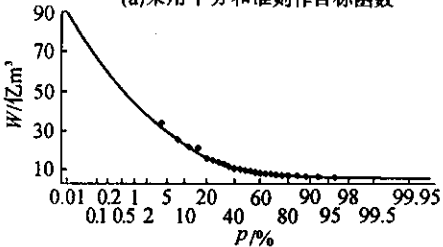
图 4(a)是对伊河 1956~1979 年资料采用公式(6)(即以平方和准则为目标函数)计算所得的频率曲线,图 4(b)为用绝对值准则的计算结果. 从两幅图中根据实际经验判断可知,计算出的理论曲线同经验点据的配合已达到了要求,无需再人为进行调整.

4 结 语

水文频率计算中水文设计值往往采用 P-Ⅲ型分布的目估适线获得经验点据和理论曲线最佳配合的三参数,再通过公式(5)计算而得. 因此,目估适线结果的好坏将大大影响水文设计值的取值. 然而,目估适线的结果却是因人而异,任意性较大. 本文将正多面体最优化算法引入到水文频率计算领域,建立



(a)采用平方和准则作目标函数



(b)采用绝对值准则作目标函数

图 4 伊河(1956~1979 年)多年径流量-频率曲线 了解皮尔逊曲线分布中 3 个参数 $E(X)$, C_v 和 C_s 的最优值求解模型,不仅获得了理论曲线同经验点据的最佳配合,还实现了频率计算中三参数的自动优化,并在洛阳地区水资源评价中得到了验证,在实际应用中取得了很好的效果. 同时,本文方法还被应用在频率计算的理论研究领域中^[4~6],通过蒙特卡罗法模拟的大量水文系列需要进行频率计算时正多面体方法起到了重要的作用.

参考文献:

[1] 郁永熙. 介绍一种新的优化方法[J]. 上海交通大学学报,1983,17(1): 117-125.
[2] 赫素敏,王忠杰,王素芝. 正多面体法在单相异步电动机优化设计中的应用[J]. 电机技术,2000(4): 20-22.
[3] SL 44-93,水利水电工程设计洪水计算规范[S].
[4] 黄振平,王春霞,马军建. P-Ⅲ型分布的适应性与水文设计值的误差分析[J]. 水文,2002,22(5): 21-22.
[5] 黄振平,王春霞,马军建. 历史洪水重现期的误差对设计洪水的影响[J]. 河海大学学报(自然科学版),2002,30(1): 79-82.
[6] 黄振平,萨迪伊,王春霞,等. 关于适线法中经验频率计算公式的对比研究[J]. 水利水电科技进展,2002,22(5): 5-7.

(收稿日期 2004-03-23 编辑 高建群)

