# 加劲环式压力钢管局部稳定性分析的有限柱壳单元法

马文亮,刘东常,刘琰玲,兰文改

(华北水利水电学院土木工程系,河南 郑州 450008)

**摘要**:采用半解析有限柱壳单元法,分析了水电站加劲环式压力钢管的局部稳定性问题.在分析过程中考虑了初始缝隙和加劲环的影响,建立了圆柱壳单元的刚度矩阵.计算结果可以较好地与经典的理论解及试验结果相吻合,为加劲环式压力钢管局部稳定性问题分析提供了一种新的可行方法.

**关键词**:压力钢管;加劲环;局部稳定性;初始缝隙;圆柱壳单元

**中图分类号**:TU33+3 **文献标识码**:A **文章编号**:1006-7647(2005)02-0033-03

**Finite cylinder shell element method for analysis of local stability of stiffener penstock**//MA Wen-liang, LIU Dong-chang, LIU Yan-ling, LAN Wen-gai(*Dept. of Civil Engineering of North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Zhengzhou* 450008, *China*)

**Abstract**: In the present study, a stiffness matrix of cylinder shell elements was established with the influences of incipient interstices and stiffeners taken into account. The calculated results accord with the classical theoretical and experimental solution, therefore, the method provides a new and feasible way for local stability analysis of stiffener penstocks.

**Key words**: penstock; stiffener; local stability; incipient interstice; cylinder shell element

水电站加劲环式压力钢管常会发生局部失稳.计算压力钢管稳定性的公式很多,其中有经验公式也有理论公式,这些公式都有各自的基本假定和特点.本文采用有限柱壳单元法,考虑到加劲环式压力钢管发生局部失稳时的位形特点,把结构离散为圆柱壳单元.在问题的分析过程中,把结构的位移模式取为半解析型函数,沿轴向采用离散型的 Hermite 插值多项式,径向采用Amstutz公式,推导过程中钢管管壁失稳屈曲的位移公式 $\eta(\varphi)=a\cos(\varepsilon\varphi)+b\cos\varphi+c$,其管壁局部失稳波形如图 1 所示.这样处理此问题具有划分单元个数少、单元自由度少、收敛快、精度高等优点.

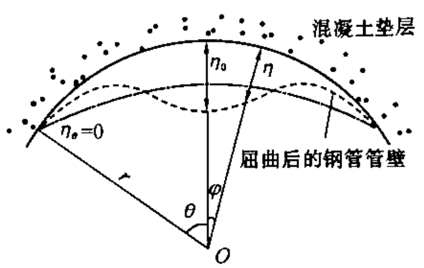


图 1 钢管管壁局部失稳屈曲示意图

## 1 有限柱壳单元法的理论推导

### 1.1 柱壳单元的位移模式

压力钢管局部稳定性分析的有限柱壳单元法的单元划分如同文献[1]所述.完成单元划分后,就要确定单元的位移模式.圆柱壳单元 e(图 2),其壳体的厚度为 $t$,单元轴向长度为 $B$,结圆半径为 $R$.为了计算方便,建立了如图 2 所示的局部坐标系.

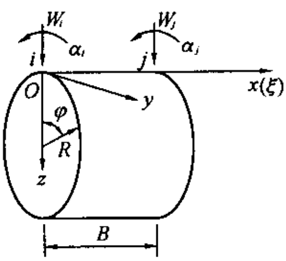


图 2 圆柱壳单元

建立典型单元 e 的力学模型,单元结点位移向量为

$$\boldsymbol{\delta}=[W_i \quad \alpha_i \quad W_j \quad \alpha_j]^{\mathrm{T}}$$

半解析型位移函数表达式选为

$$W(\xi,\varphi)=X(\xi)\eta(\varphi)$$

式中:$X(\xi)$为 Hermite 插值多项式函数,如文献[1]

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50079005)

作者简介:马文亮(1979—),男,黑龙江宾县人,硕士研究生,从事建筑结构和水工结构的稳定性分析及计算研究.

所述,其中 $\xi = x/B$($\xi$ 为无因次坐标);$\eta(\varphi)$ 为文献[2]中 Amstutz 公式推导时得到的径向位移函数,$\eta(\varphi) = a\cos(\varepsilon\varphi) + b\cos\varphi + c$,其中 $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{qR^3}{EI}}$,$\varphi$ 为圆心角,$E$ 为弹性模量.

径向位移函数 $\eta(\varphi)$ 中的积分常数 $a, b, c$ 可由图 1 所示的边界条件决定,其中 $\theta$ 为对称失稳时所对应的失稳角度. 由此可得

$$\begin{cases} a\cos(\varepsilon\theta) + b\cos\theta + c = 0 \\ -a\varepsilon\sin(\varepsilon\theta) - b\sin\theta = 0 \\ a(1-\varepsilon^2)\cos(\varepsilon\theta) + c = 0 \end{cases} \tag{1}$$

从后两个方程可解得

$$\begin{cases} b = -a\dfrac{\varepsilon\sin(\varepsilon\theta)}{\sin\theta} \\ c = a(\varepsilon^2 - 1)\cos(\varepsilon\theta) \end{cases} \tag{2}$$

要使 $a, b, c$ 有非零解,式(1)的系数行列式必须为零,由此可以得

$$\varepsilon\tan\theta = \tan(\varepsilon\theta) \tag{3}$$

再由文献[2]中 Amstutz 公式的推导过程可以得出

$$\frac{\gamma}{4R}a^2 - \left(\beta + \pi e\frac{\lambda}{R}\right)a + \pi R\frac{\sigma_s - \sigma_V}{E} = 0 \tag{4}$$

其中

$$e = \frac{t}{2}$$

$$\sigma_V = -\frac{\Delta}{R}E$$

$$\lambda = (\varepsilon^2 - 1)[1 - \cos(\varepsilon\theta)]$$

$$\beta = \left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)[\varepsilon\theta\cos(\varepsilon\theta) - \sin(\varepsilon\theta)]$$

$$\gamma = \varepsilon\Big[\varepsilon\theta - \sin(\varepsilon\theta)\cos(\varepsilon\theta) + \varepsilon\theta\frac{\sin^2(\varepsilon\theta)}{\sin^2\theta} - \varepsilon\sin^2(\varepsilon\theta)\cot\theta\Big]$$

式中:$e$ 为钢衬纵剖面管壁中和轴到最外缘的距离;$\sigma_V$ 为灌浆对管壁产生的预压环向应力;$\sigma_s$ 为钢管材料屈服应力;$\Delta$ 为钢衬与混凝土之间的初始缝隙.

从式(3)可以看出 $\varepsilon$ 和 $\theta$ 不是互相独立的,即每给定一个 $\theta$ 值就会有相应的 $\varepsilon$ 值与之对应. 如果 $\varepsilon$ 和 $\theta$ 值确定了,就可以通过式(4)解出 $a$ 值,再代入式(2)求得 $b$ 和 $c$ 的值,至此,积分常数 $a, b, c$ 的值就确定了.

几何方程、物理方程和平衡方程的推导参见文献[1],此处不再赘述.

### 1.2 弹性刚度矩阵和几何刚度矩阵

由单元弹性变形体的总应变能公式,可导出圆柱壳单元的弹性刚度矩阵 $k_E$ 和几何刚度矩阵 $k_G$,其中弹性刚度矩阵为

$$\boldsymbol{k}_E = \boldsymbol{k}_{E1} + \boldsymbol{k}_{E2} + \boldsymbol{k}_{E3} + \boldsymbol{k}_{E4} \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{k}_{E1} = \frac{ERt^3A_1}{6(1-\mu^2)B^3}\boldsymbol{A} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{k}_{E2} = \frac{\mu Et^3A_2}{180(1-\mu^2)BR}\boldsymbol{B} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{k}_{E3} = \frac{EBt^3A_3}{5\,040(1-\mu^2)R^3}\boldsymbol{C} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{k}_{E4} = \frac{Et^3A_4}{180(1+\mu)BR}\boldsymbol{D} \tag{9}$$

$$A_1 = -\frac{4ab\cos(\varepsilon\theta)\sin\theta}{(\varepsilon-1)(\varepsilon+1)} + \frac{4a(b\varepsilon^2\cos\theta + c\varepsilon^2 - c)\sin(\varepsilon\theta)}{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon-1)} + \frac{a^2\sin(2\varepsilon\theta)}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}(2a^2\theta + 2b^2\theta + 4c^2\theta + b^2\sin(2\theta) + 8bc\sin\theta) \tag{10}$$

$$A_2 = \frac{2a(b\varepsilon^2\cos\theta + c\varepsilon^2 - 2c)\sin(\varepsilon\theta)}{\varepsilon} + \frac{a^2(\varepsilon^2-1)\sin(2\varepsilon\theta)}{2\varepsilon} - 2ab\cos(\varepsilon\theta)\sin\theta - 2bc\sin\theta + a^2\varepsilon^2\theta - 2c^2\theta - a^2\theta \tag{11}$$

$$A_3 = \frac{a^2(\varepsilon^2-1)^2\sin(2\varepsilon\theta)}{2\varepsilon} - \frac{4ac(\varepsilon^2-1)\sin(\varepsilon\theta)}{\varepsilon} + (a^2 + 2c^2 - 2a^2\varepsilon^2 + a^2\varepsilon^4)\theta \tag{12}$$

$$A_4 = \frac{4ab\varepsilon\sin(\varepsilon\theta)\cos\theta}{(\varepsilon+1)(\varepsilon-1)} - \frac{4ab\varepsilon^2\cos(\varepsilon\theta)\sin\theta}{(\varepsilon+1)(\varepsilon-1)} - \frac{1}{2}b^2\sin(2\theta) - \frac{1}{2}a^2\varepsilon\sin(2\varepsilon\theta) + b^2\theta + a^2\varepsilon^2\theta \tag{13}$$

式中:$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 为对称矩阵,具体的表达式参见文献[1].

几何刚度矩阵为

$$\boldsymbol{k}_G = \boldsymbol{k}_{Gx} + \boldsymbol{k}_{Gy} + \boldsymbol{k}_{Gxy} \tag{14}$$

对于压力钢管而言,经过积分运算,可知 $\boldsymbol{k}_{Gx}$ 和 $\boldsymbol{k}_{Gxy}$ 为零矩阵,而 $\boldsymbol{k}_{Gy}$ 为

$$\boldsymbol{k}_{Gy} = -\frac{qBA_4}{420}\boldsymbol{C} \tag{15}$$

其中 $A_4$ 同式(13),$\boldsymbol{C}$ 同式(8).

至此,推导出了加劲环式压力钢管局部稳定性分析的弹性刚度矩阵和几何刚度矩阵.

### 1.3 局部稳定性问题的计算

利用刚度集成法形成结构的总体弹性刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_E$ 和结构的总体几何刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_G$,就可以得到描述稳定性问题的特征方程

$$(\boldsymbol{K}_E + q\boldsymbol{K}_G^*)\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{P} \tag{16}$$

在这里,把 $\boldsymbol{K}_G^*$ 称为当量刚度矩阵.

当结构丧失稳定性时,描述结构的平衡方程(16)是不稳定的,即矩阵 $(\boldsymbol{K}_E + q\boldsymbol{K}_G^*)$ 奇异,由此可知,可以把求最小失稳荷载问题转化为求解 $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$ 的特征值问题(式中 $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{K}_E^{-1}\boldsymbol{K}_G^*$,$\lambda = 1/q$,$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵).

在求解过程中,将加劲环间的管壁划分为 $n$ 个单元,则结点数为 $n+1$ 个.先不考虑加劲环的稳定,把加劲环对管壁的约束看成是固定端约束.可知,结构的零位移有 $W_1 = W_{n+1} = 0$,$\theta_1 = \theta_{n+1} = 0$,由于问题的对称性,可知 $\theta_{1+\frac{n}{2}} = 0$.引入以上约束条件,就能得到弹性刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_E$ 和当量刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_G^*$.然后,再用幂迭代法求特征方程式 $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$ 的特征根 $\lambda_{max}$ 及相应的特征向量 $\boldsymbol{\delta}$,接下来,程序不断地改变 $\varepsilon$ 值,这样 $\theta$ 值也随着变化,对于每一个失稳角度 $\theta$,都能得出相应的最小失稳荷载,然后,从这些最小失稳荷载中找出绝对值最小的,即是结构的实际最小失稳荷载 $q_{min}$.

## 2 算 例

某埋藏式加劲压力钢管,内径 4000 mm,初始缝隙 $\Delta = 0.5$ mm,钢管由 A3 钢弯制,弹性模量 $E = 206 \times 10^3$ MPa,泊松比 $\mu = 0.3$,钢管材料屈服应力 $\sigma_s = 235$ MPa,管壁厚度 $\delta = 20$ mm.采用前面所述的半解析有限元法,在加劲环间距不断改变的情况下,表 1 给出了钢管的临界失稳荷载 $P_{cr}$ 和失稳角度 $\theta$ 的变化趋势,并与经典的 Misse 解进行了比较.

表 1 半解析有限元解与 Misse 解的比较

| 加劲环间距 $L$/mm | 有限元解 | | Misse 解 | |
|---|---|---|---|---|
| | $P_{cr}$/MPa | $\theta$/(°) | $P_{cr}$/MPa | 失稳波数/个 |
| 1000 | 5.615 | 24.551 | 4.505 | 11 |
| 2000 | 2.301 | 33.752 | 2.132 | 8 |
| 3000 | 1.452 | 38.293 | 1.371 | 7 |
| 8000 | 0.525 | 67.257 | 0.503 | 4 |
| 15000 | 0.271 | 89.416 | 0.256 | 3 |
| 20000 | 0.195 | 92.753 | 0.188 | 3 |

另外,如果加劲环间距 $L = 4000$ mm 保持不变,其他条件与前述相同时,钢管的临界失稳荷载 $P_{cr}$ 随初始缝隙值 $\Delta$ 改变的变化趋势见表 2.

表 2 $P_{cr}$ 随 $\Delta$ 改变的变化趋势

| $\Delta$/mm | $P_{cr}$/MPa | $\Delta$/mm | $P_{cr}$/MPa |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 1.168 | 0.7 | 0.955 |
| 0.2 | 1.107 | 0.8 | 0.923 |
| 0.3 | 1.075 | 0.9 | 0.887 |
| 0.4 | 1.046 | 1.0 | 0.845 |
| 0.5 | 1.017 | 1.1 | 0.800 |
| 0.6 | 0.986 | 1.2 | 0.754 |

通过表 1 可以看出,当加劲环间距较小时,有限元解与 Misse 解相差较大,但是,随着加劲环间距的增大,有限元解与 Misse 解就越来越接近,并且有限元解略大于 Misse 解,这是因为 Misse 公式适用于带加劲环的露天式压力管道,而对于本算例中的埋藏式加劲压力钢管,初始缝隙较小,对失稳屈曲有限制作用,再加上把加劲环处理成固定端约束,这些因素都可以导致有限元解略大于 Misse 解.从表 2 也可以发现,随着初始缝隙 $\Delta$ 值的增大,失稳荷载 $P_{cr}$ 逐渐减小.当 $0.2\,\text{mm} \leqslant \Delta \leqslant 0.8\,\text{mm}$ 时,$P_{cr}$ 随 $\Delta$ 变化比较平缓,而在此区间之外时,$P_{cr}$ 随 $\Delta$ 变化比较显著.理论与试验结果均表明,当初始缝隙值的实用范围为 $(10^{-4} \sim 4 \times 10^{-4})R$ 时,$P_{cr}$ 的变化并不显著.由此可见,表中数据与理论和试验的结果比较吻合.

为了验证本文方法的正确性,可与文献[3]的试验值作比较,共有 4 个模型试验,模型钢管尺寸为:半径 $R = 130$ mm,壁厚 $\delta = 20$ mm,屈服极限 $f_y = 231$ MPa,弹性模量 $E = 209 \times 10^3$ MPa,泊松比 $\mu = 0.311$.其中 1 号和 2 号模型的加劲环间距 $L = 130$ mm,3 号和 4 号模型的加劲环间距 $L = 260$ mm.有限元解与模型试验值的比较见表 3.

表 3 本文计算结果与文献[3]试验结果的比较

| 模型编号 | $P_{cr}$/MPa | | $\theta$/(°) | |
|---|---|---|---|---|
| | 试验值 | 有限元解 | 试验值 | 计算值 |
| 1 | 10.600 | 10.582 | 10.639 | 11.356 |
| 2 | 10.800 | 10.582 | 12.664 | 11.356 |
| 3 | 6.400 | 6.183 | 15.390 | 15.213 |
| 4 | 6.200 | 6.183 | 15.047 | 15.213 |

表 3 中的计算值较试验值小,这是因为发生失稳时,钢管管壁与混凝土之间可能存在初始黏结力.由此可见,此种方法计算值较试验值小是偏于安全的.

在用有限柱壳单元法求解的过程中,设定初始值 $\varepsilon_1$ 的范围一般在 5 ~ 20 之间,初始迭代步长为初始值 $\varepsilon_1$ 的 0.1 倍,随着迭代的进行,步长也在不断变化,当两次迭代的值小于 $10^{-6}$ MPa 时,就认为迭代收敛.另外,单元划分的个数对于计算结果的精度影响不大.

## 3 结 语

综上所述,用半解析有限柱壳单元法解埋藏式带加劲环的压力钢管局部稳定性问题,在问题的分析过程中考虑加劲环和初始缝隙的影响,其计算结果与经典理论解和试验结果比较吻合.但对于此问题的更深入研究,还有待于进一步开展工作.

参考文献:

[1] 刘东常.全面外压圆柱壳稳定性问题的有限元分析[J].华北水利水电学院学报,1986(2):39—51.
[2] 王树人,董毓新.水电站建筑物[M].北京:清华大学出版社,1984.66—77.
[3] 赖华金,范崇仁.带加劲环埋藏式压力钢管外压屈曲的研究[J].水利学报,1990(12):30—36.

(收稿日期:2004-09-14 编辑:高建群)