弹性力学辛体系研究进展

朱炳麒[1],卓家寿[2],周建方[1]

(1.河海大学机电工程学院,江苏 常州　213022;2.河海大学土木工程学院,江苏 南京　210098)

摘要:简述弹性力学问题从Lagrange体系向辛体系过渡的思想,介绍辛体系的几种求解方法,按解析法、半解析法、完全数值方法、动态问题等几个方面对辛体系的研究进展进行综述,分析了目前已取得的研究成果并对其水平作了相应评述,对辛体系的发展趋势作了展望.研究结果表明,辛体系用对偶的两类变量(位移和应力)进行求解,具有Lagrange体系无法比拟的优越性,其发展前景非常广阔.

关键词:弹性力学;Lagrange体系;辛体系;对偶

中图分类号:O343　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1006-7647(2005)02-0053-05

Advances in research of Symplectic system of elasticity//ZHU Bing-qi[1], ZHUO Jia-shou[2], ZHOU Jian-fang[1] (1. *College of Mechanical & Electrical Engineering*, *Hohai Univ.*, *Changzhou* 213022, *China*; 2. *College of Civil Engineering*, *Hohai Univ.*, *Nanjing* 210098, *China*)

Abstract: A brief introduction was given to the idea of transition of the Lagrange system to the Symplectic system in elasticity and several methods for solving the Symplectic system. Some advances in research of the Symplectic system were summarized in the aspects of the analytical method, semi-analytical method, entirely numerical method, and dynamic problems. Based on an analysis of the research result about the Symplectic system, the development level of the system was commented, and the trend of its further development was discussed. The research shows that the Symplectic system is superior to the Lagrange system because of its adoption of the dual variables of displacement and stress, and that the Symplectic system is of wide prospect in future.

Key words: mechanics of elasticity; Lagrange system; Symplectic system; duality

弹性力学问题的求解一直是其发展的一个“瓶颈”,传统的解析求解方法都是在一类变量的范围之内进行的,其思路总是用各种方法对未知函数予以消元,得到一个高阶偏微分方程后再对未知函数求解,属于Lagrange体系,通常采用半逆法求解.近几十年弹性力学问题的数值方法发展迅速,出现了有限差分法、有限元法等十多种数值分析技术.然而,这些数值方法都是在Lagrange体系下发展起来的,因此,无法突破该体系自身的局限性.

20世纪90年代,冯康教授等[1~3]经过深入研究,将辛算法应用于动态问题的计算,显示了辛体系(Hamilton体系)的优越性;钟万勰教授等[4~10]则将辛体系引入到弹性力学中,建立和发展了弹性力学辛体系.

1　导向辛体系

将弹性力学问题从Lagrange体系导向辛体系有几种途径,下面简述从势能变分原理导向辛体系的思想[9,10].

首先将某一坐标模拟为时间坐标,并用一点代表对该坐标的微商,采用勒让德(Legendre)变换引入位移的对偶变量,然后将Lagrange体系中弹性力学问题的总势能表示为位移及其对偶变量(应力)的形式,由势能变分原理即得Hamilton对偶方程组,它是含有位移和应力两类变量的一阶正则方程组;再引入全状态向量、单位辛矩阵、Hamilton算子矩阵并定义辛内积,则全状态向量组成一辛几何空间.这样就完成了从Lagrange体系向辛体系的过渡,其意义在于从传统的欧几里得(Euclidean)几何形态进入到辛几何形态之中,可以应用对偶的混合变量方法进行研究.

弹性力学的Hamilton对偶方程组也可由基本方程推得,或通过引入Hamilton密度函数而直接写出其Hamilton对偶方程的矩阵向量形式[10],还可由其

基金项目:教育部博士点基金资助项目(20010294002)

作者简介:朱炳麒(1962—),男,江苏江阴人,副教授,硕士,从事工程力学研究.

他变分原理(如 Hellinger-Reissner 变分原理、最小余能原理、广义余能原理)推得[11].

2 弹性力学辛体系求解方法

进入辛体系,将弹性力学方程化为 Hamilton 对偶方程后,可采用解析法、半解析法、全区域离散的完全数值方法进行求解.

解析法可利用分离变量法和本征函数展开求解.对于齐次问题,用分离变量法进行求解.对于非齐次问题,可采用先求一个特解,再将原问题化为齐次问题;或者利用 Hamilton 算子矩阵的本征向量间存在的共轭辛正交关系,将非齐次项按本征向量展开,然后代入原方程就可求得通解,再根据边界条件确定常数[9,10].

半解析法的思路是在一个方向(“纵向”)采用解析求解,即仍保持为微分方程的形式,在纵向求解微分方程组,而在其余方向(“横向”)予以离散,采用数值方法求解.以基于 Hellinger-Reissner 变分原理的半解析法为例,其思想是对某一方向进行离散,划分单元后,对任一单元引入形函数,由 Hellinger-Reissner 变分原理可得该单元的一组方程,容易证明,离散后仍属于辛体系.把所有单元的列式拼装在一起,就可得到半解析法的控制方程.求解该方程可采用辛本征向量展开法以及两端边值问题的逐步积分法[9,12,13].

基于 Hellinger-Reissner 变分原理的有限元法的思想是对全区域进行离散,并引入形函数,由 Hellinger-Reissner 变分原理,得单元控制方程,可以证明离散后仍属于辛体系.将单元控制方程叠加,得到整体控制方程,对其求解,就可得到原问题的数值解[14].

3 研究进展

弹性力学辛体系已经建立,辛体系给弹性力学这门古老的学科带来了勃勃生机,使弹性力学的理论与分析达到新的境界,为解决工程实际问题增添了新思路、新方法,从此开辟了弹性力学问题理性求解的新天地,显示出强大的生命力,取得了丰硕的研究成果.

3.1 解析法

传统的分离变量法会受到 Sturm-Liouville 自共轭算子谱的限制,本征函数的正交性和完备性在理论上不能得到保证.辛体系下弹性力学问题的本征向量之间存在共轭辛正交关系,现已从理论上证明了辛正交系的完备性,从而突破了传统的分离变量法导致自共轭算子谱的限制和 Euclidean 空间的限制,为辛体系下的分离变量法奠定了坚实的数学基础,拓展了 Sturm-Liouville 问题[15,16].

找到了直角坐标下平面弹性问题(包括平面各向异性问题和多层层合板问题)、弹性柱体(包括各向异性柱体)三维问题的全部圣维南问题的本征解,也找到了圣维南原理所覆盖的解的本征值,并给圣维南解在整个解空间中定了位;Saint-Venant 半逆法求得的解已是零本征值相应解的全部.根据本征值和边界条件,可定量分析具体问题中圣维南原理所覆盖解的影响范围.通过零本征值的本征向量子空间的展开求解,对这些问题给出了圣维南问题的一个理性解析解法[9,10,17~19].

辛体系中,各向异性弹性问题的求解与各向同性问题的求解在本质上没有区别,而对于多层层合板圣维南问题,也成功地求得了解析解,为层合板问题的横向本征向量展开解法的实际应用打下了良好的基础,充分显示了弹性力学求解辛体系的有效性及其应用潜力,必将对弹性力学的发展产生重要影响.在Lagrange体系中,由于采用一类变量,在表示层合板问题界面位移连续条件与应力平衡条件时面临困难,给解析求解带来许多难点问题,因此没有也不太可能有令人满意的求解和理论分析.在辛体系下采用两类变量,可用两个位移和两个连续的应力分量作为基本未知量,而不连续的应力分量不作为基本未知量,能准确地模拟层交界面的黏合情况,从而考虑了剪切效应的影响,使计算结果更符合实际情况,对于一般各向异性材料也能进行解析求解.因此,对于复合层板、碾压混凝土坝、成层地基的计算,辛体系的求解方法有广泛的应用前景.

辛体系引入到极坐标平面弹性问题,将径向及环向分别模拟为时间坐标,建立了两种不同形式的辛体系,给出了圆形及环扇形域平面弹性问题的一个解析求解方法[7,10],将其应用于弹性曲梁问题,可解决 Lagrange 体系半逆法无法求解的混合边值问题[20];应用于弹性楔问题,求得了弹性楔的佯谬解[21].在环向辛体系下,求得了极坐标弹性力学问题的一个新解[22],利用这个新解可求解一类有实际意义的弹性力学问题,如厚壁圆筒受非均匀水压力作用问题、悬臂曲梁外侧受正弦分布径向荷载作用的问题.传统方法在求解圆筒受水压力作用的问题时,总是将水压力视为均匀分布,因此,辛体系下的这一新解不仅能丰富弹性力学求解的内容,更能显示辛体系的优越性,并给出了一个求解弹性力学非齐次边界条件问题的一般方法,即放弃齐次边界条件,这一方法是对辛体系分离变量法的一个发展.

将极坐标径向辛体系应用于断裂力学奇点解的计算,采用本征函数向量展开的方法再结合变分原

理,研究了两种材料组成的弹性体在交界面上含裂纹时的裂纹尖端奇异场[23].对于这类问题,在 Lagrange 体系中常采用复变函数法、积分变换法、本征值求解等方法.对于更一般的复杂问题,则采用有限元一类的数值方法,此时必须对奇点处进行特殊处理,各种处理方法各有其优缺点.而在辛体系中,通过双材料界面协调条件的引入,可十分方便地建立应力奇性求解方程,给出了求解双材料界面裂纹尖点应力奇性的一般表达式及应力强度因子的计算公式,为此类问题的求解开辟了一条新途径.与有限元一类数值方法相结合,可对较复杂的问题进行求解.

辛体系应用于轴对称问题,建立了本征方程(变系数的线性常微分方程组),求解了本征解,为展开法求解奠定了基础[9].传统方法得到的一些解往往就是这些本征解或者是其线性组合,辛体系的方法则可求解更多的问题.更重要的是这些本征解是展开法的基底,在推导无限元时需要采用本征函数展开法,而传统方法求得的孤立的解对此是无能为力的.

基于平面弹性与薄板弯曲的相似性原理,将平面弹性问题的辛体系及其辛几何理论直接引入到薄板弯曲问题中,形成了薄板弯曲的辛求解体系[8,10].传统的纳维(Naiver)法、莱维(Levy)法等半逆法,对于简支的各向同性板是非常有效的,而对于固支边的情况,一般给出的不是本征函数.为了提高精度,通行的补救方法是增加级数的项数或进行迭代,对复杂一点的边界条件则难于应用,尤其是对各向异性板的弯曲问题.辛体系的方法论解放了凑合法所受的限制,不仅给出了对边简支矩形板与传统方法完全相同的结果,还给出了对边自由和对边固支矩形板问题的解,以及环扇形域问题的解,并且还可求解各向异性板的弯曲问题.

对弹性力学几种主要的变分原理在辛体系中的表现形式进行的讨论,得到了辛体系中这些变分原理相互等价和相应泛函可分为两类的结论[13,24],指出了基于 Hellinger-Reissner 变分原理的模型本质上是一种协调模型,而基于广义余能变分原理的模型本质上是一种平衡模型,为基于能量变分原理的数值方法打下了理论基础.

对弹性力学辛体系中 Hamilton 原理进行讨论,得到了 Hamilton 函数与广义动量的守恒律[25].利用这两个守恒律可帮助人们分析问题和解决问题,特别是在数值计算时可用来判断计算结果的正确性及控制计算精度.

通过引入辛体系平面应力问题正则方程的 Galerkin 变分方程,证明了相应广义解的适定性[26],从而为数值求解打下了理论基础.

总之,Lagrange 体系下的半逆法是在一类变量范围内进行求解的,它依赖于具体问题而缺乏一般性,常使人无所适从,往往只能找到某些解而无法指认共有多少个解,以及是否已全部找到,也说不清楚其他的解应如何去寻找,例如局部效应的解等.辛体系在位移、应力两类变量范围内求解,从而可以采用分离变量法、本征函数展开求解等有效手段进行解析求解,有规律可循,属于理性的求解方法.理性的方法指出,局部效应的解就是本征值实部不为零的解.辛体系的分离变量法也有其缺点,主要是推导过程繁琐,容易出错,尤其对于侧边受高次分布荷载作用的问题,需逐步求解各次分布荷载对应的特解,再形成通解,最后根据两端边界条件确定待定常数,即使利用公式推导软件,工作量也很大.

3.2 半解析法

与解析法所取得的研究成果相比,半解析法的研究成果较少.对平面直角坐标弹性问题,在辛体系中基于 Hellinger-Reissner 变分原理的半解析法,从理论上证明了它的收敛性,研究了半解析法控制方程的物理意义和单元特性,得出了广义动量的守恒律[27],并分析了半解析解所适用的区域.将半解析法应用于实际,成功求解了复合材料层合板的计算等问题[12,28].将辛体系引入到圆柱坐标系后,给出了一个相应的变分原理,并基于该变分原理发展了圆柱坐标系中的半解析法,成功求解了复合材料叠层圆柱曲板问题[29].

半解析法具有节点数和单元数少、精度高、处理范围(边界条件)广等优点.但是半解析法受到区域形状的限制,目前其控制方程只能在端线和结线分别相互平行的区域内得到,使能求解的问题受到了极大限制,影响了在工程中的应用;另外,半解析法求解时需要进行较多的矩阵运算,尤其在求逆上矩阵一般不对称正定,导致计算工作量大,占用存储空间大,且影响了计算精度.

3.3 完全数值方法

目前,辛体系下的全区域离散的有限元法只作了初步探讨,基于 Hellinger-Reissner 变分原理发展了有限元法[14],突破了解析法和半解析法对区域形状要求较高的限制,在理论上证明了解的收敛性,对有限元法的误差估计进行了讨论,为有限元法应用于工程实际奠定了基础.

Lagrange 体系下的有限元法进行计算时,虽然位移的精度较高,但应力精度通常比位移精度低,如果希望应力与位移有同阶的精度,则需进行特别处理或采用特殊的单元类型.辛体系的有限元法,以位移、应力两类变量作为基本未知量进行求解,精度较高,但

也存在计算工作量大，占用存储空间大等缺点.

3.4 动态问题

辛算法在动态问题的稳定性方面和长期跟踪能力上具有独特的优越性[2]，证明了只要算法形成与分析都能在辛几何框架内，动态问题的解都会收敛于真实解.对于同一物理过程和规律，在各种不同形式体系中的数学表述是等价的，但它们对研究及求解同一问题却能提供不同的技术途径，从而导致实践中并不等效的计算方法.对于动态问题，Lagrange体系不能很好地反映其本质特征，因此，传统的算法中除了极少数的例外，几乎都不是辛的，它们都不可避免地带有人为耗散性等歪曲体系特征的缺陷.辛算法提供了研究动态问题的正确途径，解决了动态问题长期预测计算问题.这一研究成果开创了将计算物理、计算力学和计算数学结合的前沿研究领域，产生了重大的国际影响，引发了国际上大量的后继研究，包括弹性力学辛体系的建立与发展.

将辛体系应用于平板轴对称振动问题，建立了研究平板振动问题的辛体系方法，给出了单层轴对称圆板的自振频率[30].经典平板振动理论和平板修正理论均有局限性，具有许多不足，例如局部振荡丢失，难以分析层状介质力学问题等.而采用辛几何求解方法研究这类问题时，不必采用多项式位移模式或应力模式的假设，因此不丢失振动模态，所得频率参数精确，避免了经典平板理论所固有的误差，可有效地分析结构的高阶振动模态.辛几何方法也可用于厚板结构的振动分析，能解决复合材料层合板壳动力学问题.

辛体系引入到非线性动力学问题[31]，利用精细积分法进行计算，具有计算工作量小、精度高等优点，并能很好地解释耦合振动、极限环形状与耗散函数的关系等非线性动力学行为，这一研究成果表明非线性问题也能导向辛体系.

4 结 语

辛体系是建立在基本方程与解析求解基础上的，自辛体系引入到弹性力学以来，解析法一直是人们研究的重点.由于辛体系中的解析法属于理性的求解方法，一直求解下去，可得到很多有用的解答，事实证明也能得到新的解答.随着研究的深入，有理由相信传统的半逆法得到的解都能在辛体系中找到，并且能找到更多 Lagrange 体系下难以得到的新解.对于球坐标等曲线坐标的情况，由于分离变量法得到的本征方程是变系数的常微分方程组，给求解带来了一定的难度，随着微分方程理论的发展，这方面也将会有所突破.辛体系中也存在类似于分析动力学中的一些守恒性，如 Hamilton 函数的守恒性和广义动量的守恒性，这些守恒性有望在今后的理论分析和数值计算中得到利用.

目前半解析法受到区域形状的限制，未来随着辛几何理论的发展，引入曲线坐标下的半解析法或采用保辛仿射变换，可能突破这一限制.随着计算数学的发展，有望建立一套精确、高效的算法，使半解析法能应用于实际.

工程中的问题一般具有复杂的区域和复杂的边界条件，在相当长的时期内，采用完全数值方法仍然是辛体系中的主要手段，有限元法未来必将在辛体系的完全数值方法中占主导地位.各种不同的形函数对应力的精度和位移精度的影响也将在理论上得到严格的证明.在理论研究的基础上，辛体系有限元法在将来有望系统化为通用分析软件，成为分析计算工程问题的重要工具.

辛体系也能引入有限差分法，在不久的将来，有望建立适用于一般区域的差分格式，辛差分格式的精度、收敛性和稳定性也将得到证明，辛体系有限差分法有望成为继辛体系有限元法之后，又一个解决工程实际问题的新的有效方法.

由于极坐标径向辛体系适用于断裂力学中的奇性研究，因此更复杂的问题，如奇性振荡问题，更多种材料的结合点问题有望在辛体系中得到解决.

辛体系在各向异性材料、板壳结构、弹性稳定理论、结构振动、非线性等很多方面都有应用前景，还有很多工作有待开拓.总之弹性力学辛体系还有大量的课题值得研究与开拓，其发展前景是非常广阔的.

参考文献：

[1] Feng Kang. On difference schemes and Symplectic geometry [A]. In: Feng Kang. Proceedings of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations [C]. Beijing: Science Press, 1985. 42—58.
[2] 冯康，秦孟兆. Hamilton 动力体系的 Hamilton 算法[J]. 自然科学进展，1991，1(2)：110—120.
[3] 秦孟兆. 辛几何及计算哈密顿力学[J]. 力学与实践，1990，12(6)：1—20.
[4] 钟万勰. 条形域弹性平面问题与哈密顿体系[J]. 大连理工大学学报，1991，31(4)：373—384.
[5] 钟万勰. 分离变量法与哈密顿体系[J]. 计算结构力学及其应用，1990，8(3)：229—240.
[6] Zhong Wanxie, Zhong Xiangxiang. Method of separation of variables and Hamiltonian system [J]. Numerical Methods for PDE, 1993, 9(1): 63—75.
[7] 钟万勰. 弹性平面扇形域问题及哈密顿体系[J]. 应用数学和力学，1994，15(12)：1057—1066.

[8] 钟万勰,姚伟岸.板弯曲求解新体系及其应用[J].力学学报,1999,31(2):173—184.
[9] 钟万勰.弹性力学求解新体系[M].大连:大连理工大学出版社,1995.
[10] 姚伟岸,钟万勰.辛弹性力学[M].北京:高等教育出版社,2002.
[11] 周建方,卓家寿.弹性力学混合方程和 Hamilton 正则方程的几种推导方法[J].河海大学学报(自然科学版),1997,25(6):119—121.
[12] 唐立民,诸致中,邹贵平.混合状态 Hamiltonian 元的半解析解和叠层板的计算[J].计算结构力学及其应用,1992,9(4):345—360.
[13] 周建方,卓家寿.Hamilton 体系下的变分原理和半解析有限元解[J].工程力学,1998,15(1):30—38.
[14] 周建方,卓家寿,李典庆.基于 Hamilton 方法的有限元[J].河海大学常州分校学报,2000,14(3):1—6.
[15] 钟万勰.互等定理与共轭辛正交关系[J].力学学报,1992,24(4):432—437.
[16] 张鸿庆.Hamilton 体系与辛正交系的完备性[J].应用数学和力学,1997,18(3):217—221.
[17] 钟万勰,徐新生,张洪武.Hamilton 体系与弹性力学 Saint-Venant 问题[J].应用数学和力学,1996,17(9):787—789.
[18] 钟万勰,姚伟岸.多层层合板圣维南问题的解析解[J].力学学报,1997,29(5):617—626.
[19] 姚伟岸.平面各向异性哈密顿体系及圣维南问题的解析解[J].大连理工大学学报,1999,39(5):612—615.
[20] 钟万勰,徐新生,张洪武.弹性曲梁问题的直接法[J].工程力学,1996,13(4):1—8.
[21] 姚伟岸.极坐标哈密顿体系约当型与弹性楔的佯谬解[J].力学学报,2001,33(1):79—86.
[22] 周建方,卓家寿.极坐标下弹性力学的一个新解答[J].力学学报,2001,33(6):839—846.
[23] 张洪武,李云鹏,钟万勰.双材料楔形结合点的奇性分析[J].大连理工大学学报,1995,35(6):776—782.
[24] 王治国,唐立民.弹性力学中的哈密顿系统及其变分原理[J].应用数学和力学,1995,16(2):117—122.
[25] 周建方,卓家寿.Hamilton 体系下弹性力学的两个守恒律[J].固体力学学报,1999,20(1):90—93.
[26] 周建方,卓家寿.弹性力学 Hamilton 方法广义解的适定性[J].力学学报,2001,33(4):492—498.
[27] 周建方,卓家寿,李典庆.Hamilton 体系下弹性力学半解析法的一个守恒律[J].河海大学学报(自然科学版),2000,28(5):41—43.
[28] 邹贵平,唐立民.复合材料条形域问题的混合状态 Hamiltonian 元的半解析解[J].力学与实践,1993,15(6):29—34.
[29] 邹贵平,唐立民.圆柱坐标系中弹性力学的哈密顿正则方程及其哈密顿单元方法[J].计算结构力学及其应用,1995,12(1):53—59.
[30] 胡超,郑立平,刘丽坤,等.求解平板轴对称振动问题的 Hamilton 方法[J].哈尔滨理工大学学报,2001,6(3):96—101.
[31] 裘春航,吕和祥,蔡志勤.在哈密顿体系下分析非线性动力学问题[J].计算力学学报,2000,17(2):127—169.

(收稿日期:2004-06-01 编辑:高建群)

(上接第 10 页)

根据最大隶属度原则,分类结果:样本 1,4,5,6 归为第一类,样本 2 归于第二类,样本 3 归于第三类.分类结果与环境同位素、水化学分析结论一致,样本 1,4,5 为河水补给来源,样本 2 为当地降雨补给,样本 3 为河水和当地降雨的混合.

3 结 论

a. 本文应用环境同位素、水化学分析方法对 5 个典型堤段进行了地下水来源分析,得出其不同补给来源的结论:江都船厂段 T1 号孔、小菜潭段 T23 号孔、联盟庄码头 T29 号孔中的地下水为河水补给来源,T5 号孔附近的黑鱼塘水为当地降雨或近期降雨形成的地下水补给,万寿宫段 T7 号孔中的地下水为河水和当地降雨的混合.

b. 以往人们应用环境同位素调查堤坝渗漏时,只能定性地说明问题[6].本文尝试利用模糊聚类模型,同时考虑聚类判断时样本指标特征的不同权重,将 6 个样本进行聚类定量分析,聚类结果与环境同位素、水化学分析结论一致.

c. 在堤坝渗漏加固工程中,调查清楚堤内地下水(渗漏水)的来源,对防渗加固无疑具有极强的指导意义.

参考文献:

[1] Payne B R, Eriksson E, Danilin A I, et al. Guidebook on nuclear techniques in hydrology[M]. VIENNA: International Atomic Energy Agency, 1983.17—27.
[2] 李樟苏.同位素技术在水利工程中的应用[M].北京:水利电力出版社,1988.24—56.
[3] 李学礼.水文地球化学[M].北京:原子能出版社,1988.16—30.
[4] 陈守煜.工程模糊集理论与应用[M].北京:国防工业出版社,1998.81—93.
[5] 黄健元.模糊集及其应用[M].银川:宁夏人民教育出版社,1999.90—111;248—251.
[6] 陈建生,董海洲,陈亮.采用环境同位素方法研究北江大堤石角段基岩渗漏通道[J].水科学进展,2003(1):57—61.

(收稿日期:2004-08-26 编辑:高建群)