

# 无限域中的动力人工边界

贺向丽, 李同春

(河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098)

**摘要:**以二维出平面弹性波动为例, 总结了几种常用的局部人工边界, 即黏性边界、旁轴近似边界、Higdon 边界、叠加边界、透射边界和黏-弹性边界. 分析了各种局部人工边界的优缺点, 讨论它们之间的相互联系, 并对它们的精度和适用性进行了比较. 最后介绍了局部边界尤其是高阶边界可能存在的稳定性问题的研究进展.

**关键词:**无限域; 人工边界; 局部人工边界; 边界稳定性

**中图分类号:**TV312

**文献标识码:**A

**文章编号:**1006-7647(2005)03-0064-04

**Dynamic artificial boundaries condition for infinite domain//HE Xiang-li, LI Tong-chun** (*College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China*)

**Abstract:** Some local artificial boundaries for 2-D anti-plane wave motion were summarized, including the viscous boundary, paraxial axial approximation boundary, Higdon boundary, superposition boundary, transmitting boundary, and viscous-spring boundary. The advantages and disadvantages of the above boundaries and their relationships were discussed, and the precision and applicability of the boundaries were compared. Finally, some advances in the research of the stability of local boundaries, especially high-order boundaries, were introduced.

**Key words:** infinite domain; artificial boundary; local artificial boundary; stability of boundary

当结构(如大坝等)在地震激励下振动时, 波动能量由结构传到地基, 用有限离散模型模拟无限地基时, 将在人工截取的边界上发生波的反射, 从而引起波的振荡, 导致模拟失真. 解决这个问题最有效的方法就是引入人工边界条件, 为此许多学者提出了各种人工边界<sup>[1]</sup>以解决有限截取模型边界上波的反射问题. 建立人工边界的方法, 可广义地分为两类: 精确边界和局部边界<sup>[2]</sup>. 第一类方法使人工边界满足无限域内所有场方程、物理边界条件和无穷远辐射条件, 如边界元法<sup>[3]</sup>、无穷元法<sup>[4]</sup>等. 这类方法在空间和时间上是耦联的, 因此将对计算机存储量提出较高要求并耗费较长的计算时间. 第二类方法不严格满足散射波向无穷远传播的波动性质, 即不满足向无穷远逸射的辐射定律, 而是近似的, 如黏性边界<sup>[5]</sup>、旁轴近似边界<sup>[6,7]</sup>、透射边界<sup>[8]</sup>等. 局部边界在时间和空间上是局部解耦的, 因而计算机存储量小, 计算时间短, 具有良好的实用性.

## 1 局部人工边界

局部人工边界因其计算效率高、实用性强而受到关注, 研究较多. 这类方法的思路主要有 3 种, 一

是从物理波动方程传播性质出发, 二是从单侧波动解的微分方程直接离散, 三是从阻尼吸能的概念出发建立边界点上力与速度的关系. 文献[9]曾对几种常用的局部人工边界条件进行了比较, 鉴于近十几年来这个领域又有了许多发展与突破, 所以有必要进行新的总结, 揭示它们之间的关系.

### 1.1 黏性边界

黏性边界由 Lysmer 等<sup>[5]</sup>于 1969 年提出, 是最早的局部人工边界, 其思想是通过在边界上设置阻尼器以吸收系统在振动过程中向外辐射的能量.

这里以二维出平面弹性波动为例. 二维出平面弹性波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

式中:  $c$  为剪切波速,  $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ , 其中  $G$  为剪切模量,  $\rho$  为质量密度.

与边界法向成  $\theta$  角的外传平面波表达式为

$$u = f(x \cos \theta + y \sin \theta - ct) \quad (2)$$

式(2)满足波动方程(1). 设人工边界与  $y$  轴一致, 如图 1 所示. 方程(2)也满足人工边界上外行单侧波动



均,则将消除波在人工边界处的反射.在连续极限情形下,叠加边界条件等价于黏性边界,也即一阶旁轴近似.叠加边界最大的优点就是与入射角无关,但基于叠加原理不适用于非线性情况.

考虑左右两个边界,要想消除人工边界造成的虚假反射,就必须解4个不同的波传播问题.一般来说,有 $n$ 个边界平面,就要解 $n^2$ 个问题,计算时间以2的因子呈指数增长.采用叠加边界条件要耗费如此大量的计算时间,使得人们难以在实际中应用.

### 1.5 透射边界

廖振鹏等<sup>[8]</sup>提出了透射边界的概念,该方法直接在边界上模拟波从有限计算模型的内部穿过人工边界向外透射的过程,认为由透射方法产生的误差也可视为一个向外传播的波,因此提出了多次透射的概念.

如图1所示,出平面剪切波 $u(x, y, t)$ 以入射角 $\theta$ 和波速 $c$ 射向人工边界 $y$ ,入射波沿 $x$ 轴的视传播可以表示为

$$u(x, y, t) = f(ct - x \cos \theta, y) \quad (13)$$

式中 $f(*)$ 为任一函数.

设想如果点 $P$ 在时刻 $t + \Delta t$ 的位移用点 $Q$ 在时刻 $t$ 的位移代替,则入射波将穿过人工边界而不发生任何反射,其中 $\Delta t$ 为时间离散步长.为了导出与入射角 $\theta$ 无关的透射公式,由式(13)得

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x - c_a \Delta t, y, t) + \Delta u(x, y, t + \Delta t) \quad (14)$$

式中: $c_a$ 为人工波速,是一选定的常数,采用人工波速的目的是为了在包含不同物理波速的波动问题中导出统一的透射公式; $\Delta u(x, y, t + \Delta t)$ 称为一阶误差波.对一阶误差波继续采用与原入射波相同的近似,从而产生二阶误差波.重复上述处理 $m$ 次,对于人工边界点 $(x_p, y_p)$ ,可整理得 $N$ 阶透射公式:

$$u(x_p, y_p, t + \Delta t) \approx \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} C_n^N u[x_p - nc_a \Delta t, y_p, t - (n-1)\Delta t] \quad (15)$$

通过证明很容易得知在连续极限情形下,当 $c_a = \frac{c}{\cos \theta}$ 时,公式(15)就是旁轴近似人工边界.多次透射公式对波传播过程的模拟与入射角无关,而且可不加修改地应用于任意单侧波动的线性组合.同时它对波动传播过程的模拟是以离散形式完成的,可以很容易合并到有限元程序中.为提高同时模拟以不同波速传播的若干单侧波动的能力,廖振鹏等<sup>[13]</sup>又将以单一波速为特征的多次透射公式推广为用多个人工波速表征的多次透射公式:

$$\left[ \prod_{i=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{ai} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u = 0 \quad (16)$$

假定单侧波动由入射角为 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的平面波构成,若取人工波速 $c_{ai} = \frac{c}{\cos \theta_i}$ ,则推广的多次透射公式就退化为Higdon边界.

关慧敏等<sup>[14]</sup>曾就叠加边界与透射边界的精度进行了比较,结果发现在有限元波动模拟中透射边界的精度要高于叠加边界,且优越性随着边界阶数的增加而提高.

### 1.6 黏-弹性边界

黏性边界仅考虑了对散射波的吸收,不能模拟半无限地基的弹性恢复能力.Deeks<sup>[15]</sup>在黏性边界的基础上提出了黏-弹性人工边界.

在实际问题中,对散射波采用柱面波(二维问题)或球面波(三维问题)假设更合理.下面将采用柱面波模拟射向无限介质的散射波.极坐标中出平面柱面波运动方程为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (17)$$

式中: $w$ 为介质的出平面位移.

采取与黏性边界推导过程类似的方法可得任意半径 $r_b$ 处以矢径 $r_b$ 为外法线的微元面上应力同该处速度和位移的关系为

$$\tau(r_b, t) = -\frac{G}{2r_b} w(r_b, t) - \rho c \frac{\partial w(r_b, t)}{\partial t} \quad (18)$$

方程(18)的物理意义即是在人工边界上布置一系列每单位面积阻尼系数为 $C_b$ 的阻尼器和刚度系数为 $K_b$ 的线性弹簧,其中

$$C_b = \rho c \quad K_b = \frac{G}{2r_b} \quad (19)$$

如果能精确确定波源到人工边界的距离 $r_b$ ,可以由式(19)确定人工边界所施加的物理元件的系数,这样就可以完全消除散射波在人工边界的反射,即可以精确地模拟波由有限域向无限域的传播.这一方法采用由物理元件构成的人工边界,能够同时模拟散射波辐射和地基弹性恢复性能.如果忽略弹簧,这一边界即退化为Lysmer的黏性边界.黏-弹性边界也和黏性边界一样随着入射角 $\theta$ 的增大而精度降低,但是由于推导黏-弹性边界时对散射波场的假设更符合实际情况,因此实际上黏-弹性边界的精度一般要高于黏性边界.刘晶波、高峰等<sup>[16,17]</sup>对此都做了验证.

## 2 局部人工边界的稳定性研究

几乎所有的局部边界尤其是高阶边界在用于时步积分时均可能出现数值失稳的问题.关于这一稳

定性问题的研究,常采用数值试验的方法.Higdon 基于 GKS 准则<sup>[18]</sup>分析了离散化的 Higdon 边界在多维声波模拟中的稳定性,给出了相应的稳定性条件<sup>[19]</sup>.文献[20]通过分析失稳模态的存在条件,分析了以中心差分格式离散的二阶旁轴近似边界在二维弹性波动模拟中的稳定性,得到了该边界稳定的必要条件.廖振鹏等<sup>[21,22]</sup>则以多次透射边界为例,用一维模型严格考虑了逐步积分过程中人工边界结点与内部结点运动方程的耦合效应,导出了一维高频稳定性准则,并给出了消除高频振荡失稳的措施.但是这一准则难以推广到多维情形,且未考虑时步积分过程,仅为实现人工边界稳定性的必要条件.文献[23]通过由局部人工边界结点及其邻近内结点形成局部结点系,然后分析该系统时域逐步积分格式传递矩阵谱半径的大小给出局部人工边界的稳定性条件,并对在一维及二维出平面波动的有限元模拟中多次透射边界的稳定性进行了分析.李小军等<sup>[24]</sup>又发现了局部透射边界的另一种失稳——低频漂移,并对多次透射边界的漂移失稳机制进行了分析,探讨了漂移失稳发生的条件,提出了消除漂移失稳的透射公式降阶处理方法.但是这一措施并不是对所有的情形都有效.文献[25]提出了在多次透射边界算子中加上小的修正算子的简便方法,有效地消除了边界的漂移失稳.

### 3 结 语

局部人工边界并不是完全相互独立的,它们之间是互有关联的.在选用这些边界时要具体情况具体分析,不但要考虑边界的精度和稳定性,还要考虑程序实现的难易程度.对于一阶精度的边界来说,黏性边界和黏-弹性边界是最简单而且易于程序实现的,黏-弹性边界相对于黏性边界来说精度较高.对于高阶精度的边界来说,廖振鹏的透射边界是最易于在有限元上实现的.另外,对于高阶边界还需要注意的一个重要问题就是用于时步积分时可能出现的数值失稳,应合理采用消除失稳的措施.

#### 参考文献:

[1] 廖振鹏.近场波动的数值模拟[J].力学进展,1997,27(2):193—212.  
[2] 廖振鹏.法向透射边界[J].中国科学(E辑),1996,26(2):185—192.  
[3] Dominguez J. Boundary elements in dynamics[M]. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1993.  
[4] Medina F, Tailao R. Finite element technicals for problems of unbounded domains[J]. Int J Nume Methods in Engi, 1983, 19

(4):1209—1226.  
[5] Lysmer J, Kulemeyer R L. Finite dynamic model for infinite media[J]. J Engng Mech Div, ASCE, 1969, 95:859—877.  
[6] Clayton R, Engquist B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations[J]. Bull Seism Soc Amer, 1977, 76:1529—1540.  
[7] Clayton R, Engquist B. Absorbing boundary conditions for wave-equation migration[J]. Geophysics, 1980, 45:895—904.  
[8] 廖振鹏, 黄孔亮, 杨柏坡, 等. 暂态波透射边界[J]. 中国科学(A辑), 1984, 26(6):50—56.  
[9] Kausel E. Local transmitting boundaries[J]. J Engng Mech, 1988, 114(6):1011—1027.  
[10] Higdon R L. Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation[J]. Math Comp, 1986, 47:437—459.  
[11] Smith W. A non-reflecting plane boundary for wave propagation problems[J]. J Comp Phys, 1973, 15:492—503.  
[12] Kunar R R, Marti J. A non-reflecting boundary for explicit calculations[J]. Computational Methods for Infinite Domain Media-Structure Interactio, ASME, AMD46, 1981:183—204.  
[13] 廖振鹏.工程波动理论导引[M].北京:科学出版社, 1996. 266—268.  
[14] 关慧敏, 廖振鹏.局部透射边界和叠加边界的精度分析与比较[J].力学学报, 1994, 26(3):303—311.  
[15] Deeks A J, Randolph M F. Axisymmetric time-domain transmitting boundaries[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1994, 120(1):25—42.  
[16] 刘晶波, 吕彦东.结构-地基动力相互作用问题分析的一种直接方法[J].土木工程学报, 1998, 31(3):55—64.  
[17] 高峰, 马泽宝.无限地基的数值模拟[J].兰州铁道学院学报(自然科学版), 2002, 21(3):9—13.  
[18] Gustafsson B, Kreiss H O, Sundstrom A. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems[J]. II. Math Comp, 1972, 26.  
[19] Higdon R L. Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation[J]. Math Comp, 1987, 49:65—90.  
[20] Stacey R. An explicit unstable mode in the clayton and engquist transparent boundary prescription[J]. BSSA, 1991, 81:694—698.  
[21] Liao Z P, Liu J B. Numerical instabilities of a local transmitting boundary[J]. Earthq Eng Struct Dyn, 1992, 21:65—77.  
[22] 廖振鹏, 刘晶波.波动有限元模拟的基本问题[J].中国科学(B辑), 1992, 8:874—882.  
[23] 关慧敏, 廖振鹏.局部人工边界稳定性的一种分析方法[J].力学学报, 1996, 28(5):376—380.  
[24] 李小军, 廖振鹏.时域局部透射边界的计算漂移失稳[J].力学学报, 1996, 28(5):627—632.  
[25] 周正华, 廖振鹏.多次透射公式的一种稳定实现措施[J].地震工程与工程振动, 2001, 21(1):9—14.

(收稿日期:2004-04-07 编辑:骆超)