

基于可靠度的非线性随机优化

方从严, 刘 宁

(河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要:针对约束函数被随机参数非线性表达的随机非线性优化问题, 采用改进均值一次二阶矩法, 研究基于元件可靠度或各失效模式可靠度的结构优化的数学模型, 以及将随机优化问题化为确定性优化问题的方法. 算例表明, 本文方法得到的优化结果能满足所需的可靠度水平, 具有实用和有效的特点.

关键词:随机参数; 结构优化; 结构可靠度; 非线性分析; 数学模型

中图分类号: TU311.2

文献标识码: A

文章编号: 1006-7647(2005)05-0031-02

Reliability-based structural nonlinear stochastic optimization//FANG Cong-yan, LIU Ning (College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: In regard to nonlinear stochastic optimization in which the restraint function was nonlinearly expressed with stochastic parameters, the advanced first-order second-moment method was employed to study the structural optimization numerical model based on component reliability or failure pattern reliability and the method to transform the problem of stochastic optimization to that of certain determinate optimization. Case study shows that the result of optimization by the present method can meet the requirement of reliability, and the method is practical and effective.

Key words: random parameter; structural optimization; structural reliability; nonlinear analysis; numerical model

在土木工程中, 随机现象非常普遍, 如外部环境 (荷载和结构所处场地类型等) 的不确定性, 以及结构本身的不确定性 (构件材料性能、截面几何参数和计算模式的精度等不确定因素而导致的结构构件的不确定性) 等. 因此, 在进行结构优化设计时, 应当把结构的可靠度要求加入到结构优化数学模型之中. 基于可靠度的优化模型有多种, 本文采用如下描述^[1]: 寻求在给定元件可靠度或各失效模式可靠度并且限制构件尺寸的条件下, 结构具有最低材料质量或成本的设计变量 X , 即

$$\left. \begin{aligned} &\text{find } X \\ &\text{min } W(X) \\ &\text{s.t. } \left. \begin{aligned} &P[g_i(X, Y) \geq 0] \geq P_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ &x_j \geq x_j^l \quad (j = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: X 为设计变量向量; x_j^l 为变量 x_j 的下限值; m 为设计变量总数; l 为变量类型总数; Y 为随机参数向量 ($\bar{Y}$ 是其均值向量); $W(X)$ 为与设计变量 X 有关的目标函数, 常取为材料质量或成本; $P[*]$ 为第

i 个事件的概率; $g_i(X, Y)$ 为第 i 个元件或失效模式的极限状态方程; P_i^* 为第 i 个元件或失效模式所规定的可靠度; n 为约束函数个数.

针对该优化模型, 文献[2]采用均值一次二阶矩法对约束函数线性化. 但由于均值一次二阶矩法本身的缺陷^[3], 利用它求得的结果是不能令人信服的, 并且不能用于随机变量为非正态的情形. 本文采用改进的均值一次二阶矩法对其进行求解.

1 约束函数的等价形式

选取设计验算点 Y_k^* ($k = 1, 2, \dots, q$), 类似均值一次二阶矩法, 将约束函数 $g_i(X, Y)$ 在设计验算点线性化^[3]:

$$g_i(X, Y) = g_i(X, y_1^*, y_2^*, \dots, y_q^*) + \sum_{k=1}^q (Y_k - y_k^*) \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \Big|_{y_k^*} \quad (2)$$

可以求得 $g_i(X, Y)$ 的均值为

$$\bar{g}_i = \overline{g_i(X, Y)} = g_i(X, y_1^*, y_2^*, \dots, y_q^*) + \sum_{k=1}^q (\bar{Y}_k - y_k^*) \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \Big|_{y_k^*} \quad (3)$$

由于设计验算点就在失效边界上, 即有 $g_i(X, y_1^*, y_2^*, \dots, y_q^*) = 0$, 因此, 其均值 $\bar{g}_i$ 变为

$$\bar{g}_i = \overline{g_i(X, Y)} = \sum_{k=1}^q (\bar{Y}_k - y_k^*) \left. \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \right|_{y_k^*} \quad (4)$$

假定随机量相互独立且是正态分布的(对相关随机量要解相关, 对非正态的随机量要当量正态化^[3~5]), 可得 $g_i(X, Y)$ 的标准差为

$$\sigma_{g_i} = \sqrt{\sum_{k=1}^q \left(\sigma_{Y_k} \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{Y_k^*} \right)^2} = \sum_{k=1}^q \alpha_{ik} \sigma_{Y_k} \left. \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \right|_{y_k^*} \quad (5)$$

其中

$$\alpha_{ij} = \frac{\sigma_{Y_j} \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_j} \right|_{Y_j^*}}{\sqrt{\sum_{k=1}^q \left(\sigma_{Y_k} \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{Y_k^*} \right)^2}}$$

式中: α_{ij} 称为灵敏系数, 表示第 j 个随机量对第 i 个约束函数标准差的相对影响. 在已知随机量方差时,

α_{ij} 可以由 Y_j^* 确定, α_{ij} 值在 ± 1 之间, 且 $\sum_{j=1}^q \alpha_{ij} = 1$.

根据可靠度指标的定义, 有

$$\beta_i = \frac{\sum_{k=1}^q (\bar{Y}_k - y_k^*) \left. \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \right|_{y_k^*}}{\sum_{k=1}^q \alpha_{ik} \sigma_{Y_k} \left. \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \right|_{y_k^*}} \quad (6)$$

要求出约束方程 g_i 的可靠度指标 β_i , 需进行一系列迭代过程. 为便于迭代, 可先对随机量进行标准化处理^[5], 利用每次迭代求出的设计验算点, 求出随机量当量正态化的均值和标准差, 最后再求得可靠度指标. 由标准正态表可查得相对于可靠度 p_i^* 的可靠度指标 β_i^* , 则得到与式(1)中约束条件等价的不等式:

$$\beta_i^* \sum_{k=1}^q \alpha_{ik} \sigma_{Y_k} \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{Y_k^*} - \sum_{k=1}^q (\bar{Y}_k - Y_k^*) \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{Y_k^*} \leq 0 \quad (7)$$

2 等价的优化模型及求解方法

通过上述约束函数的等价化, 并把目标函数表达为随机参数均值的函数, 原优化模型可化为如下等价优化模型, 这样, 就可以运用确定性的优化方法来求解.

$$\left. \begin{aligned} &\text{find } X \\ &\min W(X) \\ &\text{s.t. } \beta_i^* \sum_{k=1}^q \alpha_{ik} \sigma_{Y_k} \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{Y_k^*} - \sum_{k=1}^q (\bar{Y}_k - Y_k^*) \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{Y_k^*} \leq 0 \\ &\quad x_j \geq x_j^l \quad (j = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中符号意义同前.

要直接对上述优化模型进行迭代, 可以想象是

非常困难的. 因为每给出一个设计变量, 并由此得出其设计验算点和相应的可靠度指标后, 改变设计变量, 相应的可靠度指标和设计验算点都要改变. 如果对设计变量的每一次改变都计算一次相应的可靠度指标, 不仅难以得到正确的解答, 就是搜索方向都不易获得. 因此, 本文提出如下迭代方法——改进均值一次二阶矩法.

a. 基本思路: 在求出设计变量对应的设计验算点后, 给设计变量一微小的改变量, 其对应的设计验算点的变化并不大, 可在原设计验算点上对约束函数线性化, 进行可靠度指标的求解和采用复合形法^[6]寻优.

b. 具体步骤: ①给设计变量一可行初值. ②运用复合形法进行优化, 针对优化结果利用改进均值一次二阶矩法求其对应的设计验算点 y_k^s (s 为迭代次数, $k = 1, 2, \dots, q$), 并求相应的可靠度指标 β_i . ③检查不等式 $|\beta_i^* - \beta_i| \leq \epsilon$ (ϵ 为设计控制精度) 是否成立. 若成立, 迭代停止; 否则转入下一步. ④在前一步优化结果的基础上, 对约束函数在第②步求得的设计验算点 y_k^s 处线性化, 利用前述方法进行优化, 得优化后的设计变量值, 再针对优化结果利用改进均值一次二阶矩法求其对应的设计验算点 y_k^s 和相应的可靠度指标 β_i ; 返回到第③步. 显然, 随着不断逼近最优解, 在每一迭代步设计变量的改变量也相应减小, 在前一次设计变量对应的设计验算点上进行约束函数线性化所引起的误差也不断减小, 并最终获得最优解.

3 算例分析

如图1所示打入砂土层的混凝土摩擦桩, 其支承能力一般可以认为是由混凝土的抗压强度和持力层土的支承能力来确定的. 假设桩断面是圆形的, 则与持力层土的支承能力不足相对应的第一失效模式的功能函数和与混凝土抗压强度不足相对应的第二失效模式的功能函数^[7]分别为

$$g_1 = 2\pi RL \left(\frac{\gamma L}{2} + q \right) K \tan \varphi - P \quad (9)$$

$$g_2 = \pi R^2 f_c - P \quad (10)$$

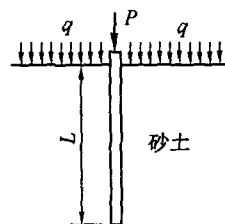


图1 混凝土桩断面

(下转第54页)

墙的情况有所减弱。

4 导流墙设计简述

a. 平面布置.导流墙的平面布置主要包括导流墙位置、长度和起始位置.导流墙一般布置在弯道轴线上,起始位置一般与弯道开始位置相同.导流墙的长度可等于或略大于弯道轴线长度。

b. 导流墙的高度.导流墙高度对弯道水流调整起着重要的作用.墙高度过低,“导流”效果不明显;墙体过高,虽然“导流”效果好,但增加了工程量,可能是不经济的.初步设计时,导流墙的高度可取按抬高泄槽底高度 Δh 的 1.0~1.1 倍.实际应用中导流墙的高度一般应通过模型试验确定。

c. 导流墙的结构形式.导流墙一般应采用钢筋混凝土结构.断面形式可采用矩形,因导流墙顶部可以过水,顶部宜做成梯形或半圆形.导流墙上、下游墩头结构形式对进、出弯道水流有一定的影响,特别是导流墙上游,由于受泄槽内水流冲击波的作用,圆

形和矩形直立导流墙墩头,水流直冲墩头而产生较高的水舌.因此,导流墙上游墩头应做成向下游倾斜、下游墩头向上游倾斜的圆锥或圆柱形斜面。

5 结 语

溢洪道泄槽弯道段设置导流墙是一种新型的调整弯道水流的工程措施,特别是当弯道转弯半径较小、采用传统的槽底设置横向坡需要弯道凸侧开挖工程量较大,甚至在弯道凹侧出现填方时,更宜采用本文方法.由于导流墙的设计理论还处于研究和探索阶段,因此,对导流墙的设计一般应通过模型试验来验证。

参考文献:

[1] 李滨孙.水工建筑物[M].北京:水利电力出版社,1997. 161—162.
[2] 胡荣辉.水工建筑物[M].北京:水利电力出版社,1993. 220—222.

(收稿日期:2004-08-25 编辑:高建群)

(上接第 32 页)

式中: R 和 L 分别为桩的半径和桩入土深度; γ 为土的容重, $\gamma = 17.59 \text{ kN/m}^3$; K 为土的侧压力系数; φ 为土的内部平均摩擦角; P 为作用在桩顶的力; f_c 为混凝土抗压强度; q 为表面附加荷载. R 和 L 为设计变量; γ 为确定量; K 和 φ, P, f_c, q 均为随机量。

根据文献[8],选取两功能函数对应的可靠度的限值分别为: $\beta_1^* = 1.64, \beta_2^* = 2.90$,要求所设计的桩体积最小.其优化模型为

$$\left. \begin{aligned} &\text{find } R, L \\ &\min W(R, L) = \frac{1}{4} \pi R^2 L \\ &\text{s.t. } \beta(g_1 \geq 0) \geq \beta_1^* \\ &\quad \beta(g_2 \geq 0) \geq \beta_2^* \\ &\quad R \geq 0.2 \text{ m} \\ &\quad L \geq 5 \text{ m} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

优化结果列于表 1.从表 1 中可看出,传统方法得到的优化结果并不能满足所要求的可靠度水平;对采用均值一次二阶矩法得到的优化结果,用改进均值一次二阶矩法核算其可靠度也不满足,这正说明均值一次二阶矩法在计算可靠度方面的不足^[3]。

4 结 语

基于可靠度的结构优化问题是十分重要而又难以解决的问题.传统的结构设计由于忽视了材料性能参数的随机性,得出的最优结构并不能保证结构所必需的可靠性水平,往往安全余度等级较低.均值

一次二阶矩法由于对可靠度的计算依赖于功能函数的不同表达形式,得到的结果也不能令人信服.本文提出的方法(改进均值一次二阶矩法)具有直观有效的特点,概念清晰,适用性较强。

表 2 优化结果

采用方法	优化结果			按改进均值一次二阶矩法求得的 β 值	
	R/m	L/m	W/m^3	$\beta(g_1)$	$\beta(g_2)$
传统方法	0.2015	10.030	0.3199	1.383	5.297
均值一次二阶矩法	0.3400	7.661	0.6968	1.307	8.441
改进均值一次二阶矩法	0.2001	10.576	0.3372	1.643	5.301

参考文献:

[1] Frangopol D M. Multicriteria reliability based structural optimization[J]. Structural Safety, 1985(3): 154—159.
[2] 雷欧 S S.工程优化原理及应用[M].祁载康,万耀青,梁青玉译.北京:北京理工大学出版社,1990.446—448.
[3] 吴世伟.结构可靠度分析[M].北京:人民交通出版社,1987.77—81.
[4] 武清玺,卓家寿.结构可靠度分析的变序列响应面法及其应用[J].河海大学学报(自然科学版),2001,29(2): 75—78.
[5] 董聪,刘西拉.非线性结构系统可靠性理论及其模拟算法[J].土木工程学报,1998,31(1):34—43.
[6] 江爱川.结构优化设计[M].北京:清华大学出版社,1986.130—150.
[7] 杨位洸.地基及基础[M].第 3 版.北京:中国建筑工业出版社,1998.315—321.
[8] GB50068-2001,建筑结构设计可靠度统一标准[S].

(收稿日期:2004-12-27 编辑:高建群)